Calcul des probabilités- Partie 1

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

February 9, 2021

Abstract

E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

1 Calcul des Probabilités

2 Introduction

2.1 Expérience aléatoire

On appelle expérience aléatoire une expérimentation ou un phénomène conduisant à plusieurs résultats et pour lequel on ne peut pas savoir *a priori* quel résultat se produira. Ces différents résultats sont appelés **issues**.

On appelle expérience aléatoire une expérience liée au hasard, dont on connait les résultats, mais dont on ne sait pas à l'avance lequel de ces résultats va survenir.

Exemples

-On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure. Les issues possibles de cette expérience aléatoire sont: pile, face.

-On jette un dé et on observe la face supérieure. Les issues de cette expérience aléatoire sont les nombres: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

-Durée de vie d'un atome radioactif.

On appelle univers, noté Ω, l'ensemble des résultats possibles(éventualités), On note ses éléments par ω.

Exemples - Pour un tirage à pile ou face on a $\Omega = \{P, F\}$.

- Pour un lancer de dé on a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- On prend $\Omega = \mathbb{R}^+$ pour la durée de vie d'un atome radioactif.

2.2 Logique des événements

Soit E une expérience aléatoire et Ω l'univers des possibles associé à cette expérience. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ définit l'espace probabilisable associée à cette expérience.

Toute partie de Ω est appelée événement.

L'événement est dit élémentaire s'il ne correspond qu'à une seule et unique issue.

L'union des événements élémentaires définit un événement composé.

- Si on note $\omega_1, ..., \omega_n$ chaque issue possible, l'univers est alors $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ et chaque $\{\omega_i\}$ est alors un événement élémentaire.

  Ω est appelé l'événement certain.

  $\emptyset$ le contraire de Ω (l'ensemble vide) est l'évènement impossible.

  Deux événements sont dits incompatibles (*deux à deux*) ou *disjoints* s'ils ne peuvent pas se produire simultanément. Si l'un est réalisé, aucun des autres ne peut l'être.

  On dit que deux événement sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$ ($A \subset \bar{B}$, $B \subset \bar{A}$).

  Exemples

  On lance un dé:

  - l'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'événement $\{6\}$ est l'événement élémentaire "obtenir un 6".

  - l' événement composé $A = \{2, 4, 6\}$ représente l'événement "obtenir un nombre pair".

  -Lors d'un jet d'une pièce de monnaie, les événements "pile" et "face" sont incompatibles.

  -Lorsqu'on lance un dé, les événements "la face supérieure du dé est 1" et "la face supérieure du dé est 2" sont incompatibles.

-Obtenir un résultat pair est un événement, constitué de trois éventualités.

-Obtenir un multiple de 10 est l'événement impossible.

Opérations

- Le complémentaire de A, noté $\bar{A} = \Omega \setminus A$, est appelé l'évènement complémentaire de A. C'est l'événement qui n'est réalisé que si A ne l'est pas.

La ***réunion*** des deux événements A et B notée par $A \cup B$ est l'événement: "A est réalisé **ou** B est réalisé".

L'***intersection*** de deux événements A et B, notée par $A \cap B$,est l'événement "A est réalisé **et** B est réalisé".

La ***différence*** $A \backslash B$ est formé des résultats qui sont dans A sans être dans B : $A \backslash B = A \cap \bar{B}$.

Un ***sysème complet d'événements*** est une famille d'événements, finie ou dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ telle qu'un et un seul de ces événements est réalisé à chaque fois (ils sont incompatibles (deux à deux) et leur réunion est l'événement certain

.

2.3 Notion de probabilité

Lors d'une expérience aléatoire, on peut la renouveler un certain nombre de fois et calculer à chaque fois la fréquence d'un événement particulier. Celle-ci correspond au rapport du nombre de fois où l'événement se produit au nombre de fois où l'expérience est réalisée.

Sur un petit nombre d'expériences, cette fréquence peut beaucoup varier. Par contre, si l'on renouvelle l'expérience un très grand nombre de fois , cette fréquence se stabilise autour d'une valeur particulière.

Le calcul des probabilités détermine cette fréquence théorique dans ce dernier cas, où l'expérience aléatoire est renouvelée un très grand nombre de fois, ce qui nous amène à considérer la définition suivante:

Définitions

Soit E une expérience aléatoire et Ω l'univers des possibles associé à cette expérience. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable associée à cette expérience (on peut considérer $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Si Ω est une ensemble fini on dit que P est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ si P est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ vérifiant:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles (c-à-d $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints) on a $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i))$

La probabilité d'un événement A, notée $p(A)$ est donnée par:

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité ou encore espace probabilisé.

- Pour un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, n étant le cardinal de Ω.

  On définit la probabilité "équiprobable" en donnant à chaque événement élémentaire une probabilité égale, pour tout i variant de 1 à n, $P(\{\omega_i\} = \frac{1}{n}$,

  On a donc, pour tout événement A, $P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega}$. On a

  $$0 \leqslant \text{nombre d'issues favorables} \leqslant \text{nombre d'issues possibles}.$$

  .

  La somme des probabilités de tous les événements élémentaires constitués à partir des issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

  Exemple

  Lorsqu'on jette une pièce de monnaie équilibrée, l'événement A : "pile" et l'événement B : "face" constituent les seuls événements élémentaires..
  On a $p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(B) = \frac{1}{2}$. On a $p(A) + p(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

  Si on dispose d'une pièce truquée qui tombe deux fois plus sur "face" que sur "pile" on a $\Omega = \{f, p\}$ avec $P(\{f\}) = \frac{2}{3}$ et $P(\{p\}) = \frac{1}{3}$.

On déduit les propriétés suivantes:

1. Pour tout événement A, une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 c-à-d: $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

2. $P(\emptyset) = 0$.

3. Si $A \subset B$ alors, $P(A) \leqslant P(B)$.

4. Soit A un événement. On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A. On a :

   $$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

   ou encore $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

   Exercice

Montrer que: Si $A \subset B$ alors, $P(A) \leqslant P(B)$.

Exemple

On lance un dé equilibré, considérons l'événement B : "la face supérieure du dé est 1". L'événement contraire $\overline{B}$ de B est "la face supérieure du dé est différente de 1".

On a $p(B) = \frac{1}{6}$. Donc $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Il y a bien 5 issues favorables (tous les nombres 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 conviennent) parmi 6 issues possibles.

2.4 Propriétés

1. Pour tout événement A et B on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

   (a) Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

   (b) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille d'événements incompatibles alors la série $\sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$ converge et
   $$P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i).$$

   (c) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille croissante (i.e. que $\forall i \in \mathbb{N} \quad A_i \subset A_{i+1}$; par exemple $A_i =$ "avoir au moins un pile lors des i premiers lancers"), alors:
   $$P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n).$$

   (d) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille décroissante (i.e. que $\forall i \in \mathbb{N} \quad A_{i+1} \subset A_i$; par exemple $A_i =$ "n'avoir que des piles lors des i premiers lancers"), alors:
   $$P\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$

   (e) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille quelconque, $P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)$.

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B).$$

(f) Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille quelconque, $P\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)$.

Exemple : Pour un dé non truqué, la probabilité de chaque face est égale à $\frac{1}{6}$.

La probabilité d'avoir un résultat pair est $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

Exemples

- Pour une pièce de monnaie, considérons l'événement E : "la pièce se positionne sur la tranche". L'issue "tranche" ne fait pas partie des issues possibles donc $P(E)=0$, l'événement E est impossible.

- Los d'un lancer d'un dé, considérons l'événement H : "la face supérieure du dé est un nombre inférieur ou égal à 6". Les issues possibles sont toutes des issues favorables à l'événement H.

  On a donc $p(Y)=1$, l'événement Y est certain.

Equiprobabilité.
Lorsque les événements élémentaires d'une même expérience aléatoire ont des probabilités égales on dit alors qu'il y a **équiprobabilité**.
Quand tous les résultats élémentaires jouent le même rôle, ils sont équiprobables et on a :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Exemple : une classe de 35 élèves comprend 20 filles.
On choisit un élève au hasard et on note F l'événement l'élève choisi est une fille.
$p(F) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$.

Exercice

On note E l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 12 et A (respectivement B et C) la partie de E dont les éléments sont divisibles par 2 (respectivement par 3, par 4).

1. Parmi les propositions suivantes les quelles sont vraies:

A est inclue dans B	B est inclue dans A	A est inclue dans C	C est inclue dans A
l'intersection de A et B est vide		l'intersection de A et C est A	l'intersection de A et C est C
la réunion de A et C est A		la réunion de A et C est C	la réunion de A et B est A

2. Déterminer :

   (a) Le complémentaire $\bar{A}$ de A dans E et le complémentaire $\bar{B}$ de B dans E,

   (b) l'intersection de A et B,

   (c) la réunion de A et B,

   (d) le complémentaire de l'intersection de A et B dans E,

   (e) le complémentaire de la réunion de A et B dans E.

2.5 Probabilité conditionnelle

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, On considère deux événements aléatoires A et B avec $P(B) \neq 0$.

On définit la probabilité conditionnelle de A sachant B et on note $P(A \backslash B)$:

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

C'est la probabilité que l'on a quand on sait que B est réalisé.

- Une probabilité conditionnelle est une probabilité particulère. On retrouve donc les mêmes règles de calcul en remplaçant la probabilité par la probabilité conditonnelle :

$$P(\Omega \backslash B) = 1, \quad P(\emptyset \backslash B) = 0, \quad P\left(\bar{A} \backslash B\right) = 1 - P(A \backslash B)$$

La probabilité conditionnelle intervient naturellement dans la calcul de la probabilité d'une intersection et dans la formule des probabilités totales:

2.5.1 Formule des probabilités composées

- On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux événements aléatoires A et B :

  On a la forumle suivante:

  $$P\left(A \cap B\right) = P\left(B \backslash A\right) P\left(A\right).$$

  D'une manière générale, on a:

  $$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2 \backslash A_1\right) \cdot \cdots \cdot P\left(A_n \backslash A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right)$$

  Remarque

  On respecte l'ordre chronologique de l'expérience pour pouvoir interpréter le conditionnement.

2.5.2 Formule des probabilités totales

- On l'utilise quand la réalisation d'un événement A dépend des résultats $\left(B_i\right)_{i \in I}$ d'une étape précédente.

  Si $\left(B_i\right)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, alors

  $$P\left(A\right) = \sum_{i \in I} P\left(A \backslash B_i\right) P\left(B_i\right)$$

  N.B. : la série converge et la somme de la série vaut $P\left(A\right)$ dans le cas où l'on a un système complet d'événement infini.

2.5.3 Formule de Bayes (Probabilités de cause)

- La formule de Bayes permet de calculer la probabilité conditionnelle suivante:

  $$P\left(A \backslash B\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(B \backslash A\right) P\left(A\right)}{P\left(B\right)}$$

  le $P\left(B\right)$ étant souvent calculé par la formule des probabilités totales.

2.6 L'indépendance

Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
On peut écrire:

$$\begin{aligned} P(A \backslash B) &= P(A) \;\; si \;\; P(B) \neq 0. \\ P(B \backslash A) &= P(B) \;\; si \;\; P(A) \neq 0. \end{aligned}$$

Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d′événements est indépendante si,quand on en prend n′importe quelle sous-famille finie, la probabilité de leur intersection est le produit de leurs probabilités.

Cette définition est la modélisation du fait que la réalisation de l′un des événements n'influe pas,sur la probabilité de réalisation de l'autre.

Exemples:

- une suite de lancers de pièces. Le fait qu′un lancer donne pile ou face ne change pas la probabilité d′avoir pile ou face à un autre lancer.Les lancers seront modélisés comme étant indépendants.

- Des tirages *avec remise* de boules dans une urne seront modélisés indépendants.

- Des tirages sans remise seront dépendants.

- On lance la pièce jusqu'à obtenir pile, on arrête les lancers dès que l'on a pile. Le fait d'avoir pile à un lancer implique que l'on en a pas eu avant. Et que l'on aura plus ni pile ni face après. Les lancers ne sont plus indépendants.

- On choisi d′abord une pièce (truquée ou équilibrée) puis on fait une suite de lancers, les résultats d'un lancer est lié à la pièce choisie. Donc via la pièce choisie, les résultats des lancers sont liés les uns aux autres et ne sont pas indépendants.

Remarque

- Pour démontrer que deux événements A et B sont indépendants**,**on calcule $p(A) \times p(B)$, puis on calcule $p(A \cap B)$. Si ces deux nombres sont égaux, alors A et B sont indépendants.

Exercice 1

On lance un dé , et on observe les événements :
A="on obtient un chiffre impair".
B="on obtient un multiple de 3".

Est-ce que le fait de **savoir** que A est réalisé change la probabilité de B? Pour le savoir,

- calculons $p(B)$: $p(B) = \frac{2}{6}$ (2 multiples de 3 parmi les 6 premiers chiffres : 3 et 6). Donc $p(B) = \frac{1}{3}$.

  Calculons maintenant $p_A(B)$: si l'on sait déjà qu'on a obtenu un chiffre impair, on sait que le chiffre obtenu est 1, 3, ou 5; parmi eux, seul 3 est un multiple de 3. La probabilité d'obtenir un multiple de 3 sachant que le chiffre obtenu est impair vaut donc : $p_A(B) = \frac{1}{3}$.

La probabilité de B, que A ait été réalisé ou pas, est la même : A n'influe pas sur la probabilité que B se réalise : on dit que A et$B$ sont **indépendants**. Formalisons.

Exercice 2
Deux machines $M1$ et $M2$ fabriquent des pièces. Elles produisent respectivement 1/3 et 2/3 de la production. La machine $M1$ sort 5% de pièces défectueuses et $M2$ en sort 6%. Soit les événements
A : "la pièce est fabriquée par M1"
B : "la pièce est fabriquée par M2" et
D : "la pièce est défectueuse".

1. Quelle est la probabilité que la pièce soit fabriquée par $M1$?
2. On tire une pièce de la production de $M1$. Quelles est la probabilité qu'elle soit défectueuse?
3. On tire une pièce de la production. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de M1 et qu'elle soit défectueuse?
4. On tire une pièce de la production. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit défectueuse?
5. Quelle est la probabilité qu'une pièce défectueuse ait été fabriquée par M1?

Solution

1. $P(A) = 1/3$.
2. $P(D \mid A) = 5/100$.

3. $P(A \cap D) = p(D \mid A)P(A) = 1/60$.
4. $P(D) = P((A \cap D) \cup (B \cap D)) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) = 17/300$.
5. $P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{1}{60} . \frac{300}{17} = \frac{5}{17}$.

Proposition
Si A et B sont des événements incompatibles, chacun de probabilité non nulle alors ils ne sont pas indépendants.

Preuve: Exercice

Exercice

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

1. On écrit l'univers des possibilités sous la forme: $\Omega_1 = \{(2F); (2P); (1Fet1P)\}$ où F désigne "face" et P désigne "pile". A-t-on l'équiprobabilité dans cette situation ?
2. On écrit l'univers des possibilité sous la forme: $\Omega_2 = \{(F, F); (P, P); (F, P); (P, F))\}$ où (a, b) signifie que a est le résultat du premier lancer et que b est le résultat du deuxième. A-t-on équiprobabilité dans cette situation ?
3. On considère les événements suivants :
A:"obtenir 2 F", B:"obtenir F au 1er lancer", C:"obtenir F au 2nd lancer" et D:"obtenir P au 2nd lancer"
   (a) Ecrire ces événements comme sous-ensembles de Ω_2.
   (b) Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies :

A et C sont incompatibles	A et D sont incompatibles	A est le contraire de D
C et D sont incompatibles	C est le contraire de D	A et B sont épendants
B et C sont indépendants	A et D sont indépendants	B et D sont indépendants

4. Calculer les probabilités des événements A, B, C, D.
5. Calculer les probabilités des événements : (A et D), (B et D), (A ou D), (B ou D).