Calcul des probabilités.

1- Définitions.

Définitions 1. On appelle ***expérience aléatoire***, toute expérience dont le résultat ne peut être prévu, c – à – d, une expérience, qui répétée plusieurs fois dans des conditions apparemment identiques, peut conduire à des résultats différents.

Définition 2. L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle ***espace fondamental*** ou ***univers des possibles***. Cet ensemble est noté par **Ω**.

Définition 3. Un ***événement*** est un résultat d'une expérience aléatoire. Donc il est une partie de Ω.

Toute partie de Ω réduite à un seul élément est appelée ***événement élémentaire***.

Un ***événement composé*** est une partie de Ω contenant plusieurs éléments. Il peut donc se réaliser de plusieurs manières.

1.1- Opérations sur les événements.

Le tableau suivant résume les principales opérations sur les événements

Langage ensembliste.	**Traduction en vocabulaire de probabilité**
L'ensemble des résultats Ω.	Ω espace fondamental.
$\omega \in \Omega$.	Ω un cas possible, une éventualité.
Singleton $\{\omega\} \subset \Omega$.	Evénement élémentaire.
$A \subset \Omega$.	Evénement composé.
L'ensemble $\Omega \subset \Omega$.	Evénement certain, il est toujours réalisé.
L'ensemble Ø.	Evénement impossible, il n'est jamais réalisé.
$B = \overline{A} = C_{\Omega}^{A}$.	B événement contraire de A.
$C = A \cap B$.	L'événement A et B, qui est réalisé ssi A et B sont simultanément réalisés.
$D = A \cup B$.	L'événement A ou B, qui est réalisé ssi l'un au moins des événements A et B soit réalisé.
$\Omega = A \cup B$ et Ø.= $A \cap B$.	A ou B est certain et A et B est impossible. A et B forment un système complet.
Ø.= $A \cap B$.	A et B sont incompatibles.

Remarque. Deux événements contraires sont incompatibles, mais la réciproque est fausse.

2- Probabilités sur un univers fini.

Définition 4. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$un univers fini non vide. On appelle ***probabilité*** définie sur Ω, toute application P de $\mathcal{P}$ (Ω) dans [0 , 1], vérifiant les axiomes suivants

1- $P(\Omega) = 1$.

2- Si A et B sont deux événement incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ une série dénombrable d'événements deux à deux incompatibles, alors $P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$. ($\sigma$ – additive)

Dans ce cas, le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est appelé un ***espace probabilisable*** et le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé ***espace probabilisé fini***.

2.1- Propriétés des probabilités.

Propriété 1. Pour tout A dans $\mathcal{P}(\Omega)$, on a $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration.

En effet, comme A et $\overline{A}$ sont des événements incompatibles, donc

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

■

Théorème (Propriété 2). $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration.

On sait que $A \cup B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup B$ avec $\left(A \cap \overline{B}\right)$ et B sont deux événements incompatibles. Alors,

$$(1) \quad P(A \cup B) = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P(B).$$

D'autre part, on a $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B) = A$ et $\left(A \cap \overline{B}\right) \cap (A \cap B) = \varnothing$, alors on peut écrire

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) + P(A \cap B) = P(A).$$

D'où

$$(2) \quad P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

De (1) ,et (2) on obtient le résultat voulu.

■

Propriété 3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Démonstration.

Comme $A \subset B$ alors on peut écrire que $B = A \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$.

Mais $\varnothing = A \cap \left(\overline{A} \cap B\right)$, par conséquent $P(B) = P(A) + P(A \cap B) \geq P(A)$.

■

3- Probabilité uniforme.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini. On définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ une probabilité P, en posant $P(\{\omega_i\}) = p_i$ tel que $\forall i = \overline{1,n}$ $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Définition 5. P est appelée ***probabilité uniforme*** si $\forall i = \overline{1,n}$ $p_i = \dfrac{1}{n}$. Dans ce cas les $\{\omega_i\}$ sont ***équiprobables***.

Généralement, dans le cas d'une probabilité uniforme, on utilise la règle suivante :

$$\text{Pour tout } A \text{ dans } \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \frac{Card\, A}{Card\, \Omega}.$$

4- Probabilité conditionnelle.

Définition 6 Soient $(\Omega \, , \, \mathcal{P}(\Omega) \, , \, P)$ un espace probabilisé fini et A un événement tel que $P(A) > 0$. L'application P_A définie de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0 \, , \, 1]$ par : $P_A(B) = P(A \cap B) \,/\, P(A)$, est appelée ***probabilité conditionnelle.***

$P_A(B)$ peut être écrit $P(B / A)$ et on dit « **la probabilité de *B* sachant *A*** ».

4.1-Propriétés.

1- Pour tout A et B dans $\mathcal{P}(\Omega)$, tel que $P(A) \,.\, P(B) > 0$, on a

$$P(A \cap B) = P(B / A) \,.\, P(A) = P(A / B) \,.\, P(B).$$

2- Pour tout A et B dans $\mathcal{P}(\Omega)$, tel que $A \subset B \Rightarrow P(B/A) = 1$.

4.2- Evénement indépendants.

On dit que A et B sont ***indépendants*** par rapport à la probabilité P si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$.

Remarques.

1- Si A et B sont indépendants alors

$P(A) > 0$ on a $P(B / A) = P(B)$.

$P(B) > 0$ on a $P(A / B) = P(A)$.

2- A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ A et $\overline{B}$ sont indépendants.

$\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ et B sont indépendants.

$\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

4.3- Théorème de Bayes.

Soient $(\Omega \, , \, \mathcal{P}(\Omega) \, , \, P)$ un espace probabilisé fini et $E, A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n + 1)$ événements, tel que $P(E) > 0$ et $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ forme un système complet, c – à – d

1) $P(E) > 0$ et $P(A_i) > 0$ pour tout i.
2) Les A_i sont 2 à 2 incompatibles.
2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Alors, on a pour tout $k = \overline{1, n}$ $\qquad P(A_k / E) = \dfrac{P(E / A_k) P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(E / A_i) P(A_i)}$.

Comme les A_i sont 2 à 2 incompatibles, alors on peut écrire $\sum_{i=1}^{n} P(E / A_i) P(A_i) = P(E)$.

Cette relation est appelée ***probabilité totale***.