

Série de TD n°1 :

Entropie

EXERCICE 1:

Une source de transmission émet 5 symboles distincts : A,B,C, D, E avec les probabilités suivantes :

$$P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.25, \quad P(C) = 0.2, \quad P(D) = 0.15, \quad P(E) = 0.1$$

- Calculer l'entropie de la source en bits.
- Déterminer l'entropie maximale possible pour une source ayant 5 symboles.
- Calculer la redondance relative de cette source.

EXERCICE 2 :

Exercice : Entropie, Quantité d'Information et Redondance

Un système de communication transmet des messages composés des symboles suivants : A,B,C,D. On connaît les probabilités d'apparition de ces symboles :

$$P(A) = 0.4, \quad P(B) = 0.3, \quad P(C) = 0.2, \quad P(D) = 0.1$$

- **Entropie de la source**

- a) Définissez l'entropie d'une source de Shannon.
- b) Calculez l'entropie $H(X)$ de cette source en bits.

- **Quantité d'information**

- a) Déterminez la quantité d'information apportée par la réception des symboles A et D.
- b) Expliquez pourquoi un symbole rare apporte plus d'information qu'un symbole fréquent.

- **Extension à une suite de symboles**

- a) Quelle est l'entropie moyenne pour un message de longueur $N=10$ constitué de ces symboles en supposant que la source est sans mémoire ?
- b) Quelle est la quantité totale d'information transmise par un tel message ?

- **Redondance du code**

- a) Définissez la redondance d'une source et expliquez son rôle dans un système de communication.
- b) Si l'alphabet utilisé comporte 4 symboles, quelle est l'entropie maximale possible ? En déduire la redondance relative de cette source.

EXERCICE 3:

Supposons la table de probabilités conjointes suivante :

X / Y	y_1	y_2	y_3
x_1	0.1	0.2	0.3
x_2	0.05	0.15	0.2

Calcul de l'entropie marginale de Y ?

EXERCICE 4 :

Considérons deux variables aléatoires discrètes X et Y avec la distribution de probabilité conjointe suivante :

	$Y = y_1$	$Y = y_2$	$Y = y_3$
$X = x_1$	0.1	0.2	0.1
$X = x_2$	0.2	0.1	0.1
$X = x_3$	0.1	0.0	0.1

1. Calculer l'entropie conjointe $H(X, Y)$.
2. Calculer l'entropie conditionnelle $H(Y|X)$.
3. Vérifier la relation entre l'entropie conjointe, l'entropie conditionnelle et l'entropie marginale :

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$$