# CHAPITRE 2

# MODELISATION DE LA MACHINE ASYNCHRONE

Les machines électriques sont représentées par des modèles entrées-sorties sous la forme de fonction de transfert ou encore sous forme standard d'équations en variables d'état.
Afin d'avoir des modèles simplifiés, on adopte des hypothèses simplificatrices qui, tout en permettant de simplifier notablement les calculs, conduisent à des résultats suffisamment précis pour la plupart des applications.

## 2.1 Machine électrique idéalisée

La machine électrique idéalisée est une machine électrique ayant les hypothèses suivantes :
- L'entrefer est d'épaisseur uniforme ;
-L'effet d'encochage est négligeable ;
- La saturation du circuit magnétique est négligeable ;
- L'hystérésis et les courants de Foucault sont négligeables ;
- Les résistances des enroulements ne varient pas avec la température.
- L'effet de peau est négligeable.
-la f.é.m. créée par chacune des phases des deux armatures est à réparation sinusoïdale.

Sous ces hypothèses, on a :

-L'additivité des flux ;
-La constance des inductances propres ;
-La loi de variation sinusoïdale des inductances mutuelles entre les enroulements du stator et du rotor en fonction de l'angle électrique de leurs axes magnétiques.

## 2.2 Machine électrique généralisée dans le repère naturel

La figure 2.1 montre la position des axes des phases statoriques ( $S_a$,$S_b$ et $S_c$) et rotoriques ( $R_a$,$R_b$ et $R_c$) dans l'espace électrique.

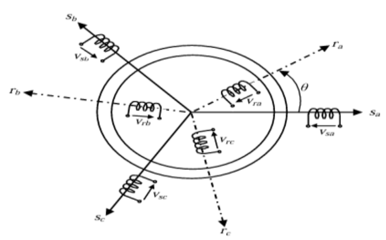

*Fig. 2.1 Représentation d'une machine électrique généralisée triphasée*

Θ : angle électrique entre l'axe de la phase « a » du stator et l'axe de la phase « a » du rotor.

Sous ces hypothèses, tous les coefficients d'inductance propre sont constants et les coefficients d'inductance mutuelle ne dépendent que de la position des enroulements.

Equations des tensions

Les équations des tensions au stator et au rotor s'expriment pour chaque enroulement comme la somme de la ***chute ohmique*** ($R_S i_{si}$ *avec i=a,b et c*) et la ***chute inductive*** ($L_S i_{si}$ *avec i=a,b et c*).

**- Pour le stator**

$$\begin{cases} v_{sa} = R_s i_{sa} + \dfrac{d\psi_{sa}}{dt} \\ v_{rb} = R_r i_{rb} + \dfrac{d\psi_{sb}}{dt} \\ v_{sc} = R_r i_{rc} + \dfrac{d\psi_{sc}}{dt} \end{cases} \tag{2.1}$$

**- Pour le rotor :**

$$\begin{cases} v_{ra} = R_r i_{ra} + \dfrac{d\psi_{ra}}{dt} \\ v_{rb} = R_r i_{rb} + \dfrac{d\psi_{rb}}{dt} \\ v_{rc} = R_r i_{rc} + \dfrac{d\psi_{rc}}{dt} \end{cases} \tag{2.2}$$

**Equations des flux**

Les expressions des flux sous forme matricielle sont :

$$\begin{bmatrix} [\psi_{sabc}] \\ [\psi_{rabc}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_s] & [M_{sr}] \\ [M_{rs}] & [L_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{sabc}] \\ [i_{rabc}] \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Avec,

$$[L_s] = \begin{bmatrix} l_s & m_s & m_s \\ m_s & l_s & m_s \\ m_s & m_s & l_s \end{bmatrix} = l_s \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$$[L_r] = \begin{bmatrix} l_r & m_r & m_r \\ m_r & l_r & m_r \\ m_r & m_r & l_r \end{bmatrix} = l_r \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Avec :
$l_s$ , $l_r$ - les inductances propres statorique et rotoriques ;
$m_s$ , $m_r$ - les inductances mutuelles statorique et rotorique.

L'inductance mutuelle entre le stator et le rotor est définie par :

$$[M_{sr}] = [M_{rs}]^T = M_0 \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Où,

$M_0$ représente le maximum de l'inductance mutuelle entre une phase du stator et une phase du rotor obtenu lorsque les axes sont alignés.

## 2 .2 Modèle biphasé de la machine électrique généralisée

C'est le modèle le plus utilisé dans le cas d'une machine symétrique.

La figure 2.2 représente le schéma d'une machine électrique généralisée biphasée.

C'est une machine bipolaire, biphasée idéale avec deux enroulements au stator et deux enroulements au rotor.

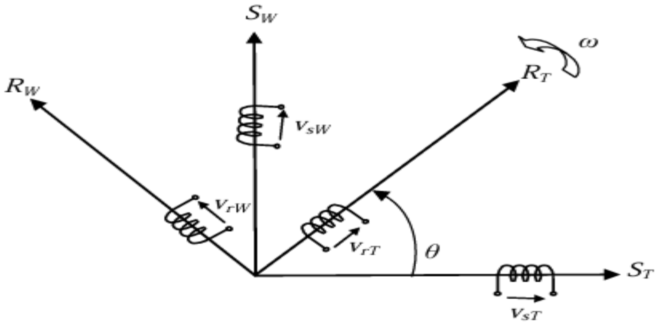


*Fig. 2.2 Représentation d'une machine électrique biphasée généralisée*

L'équation de la position angulaire entre le stator et le rotor est:

$$\theta = \int \omega dt \tag{2.7}$$

**Remarque :**

***Du modèle de la machine généralisée biphasée. On peut obtenir n'importe quel modèle de la machine électrique***.

**Equations des tensions**

On déduit les équations les équations du modèle biphasé de la machine généralisée :

$$\begin{cases} v_{ST} = R_s i_{ST} + \dfrac{d\psi_{ST}}{dt} \\ v_{SW} = R_s i_{SW} + \dfrac{d\psi_{SW}}{dt} \\ v_{RT} = R_R i_{RT} + \dfrac{d\psi_{RT}}{dt} \\ v_{RW} = R_R i_{RW} + \dfrac{d\psi_{RW}}{dt} \end{cases} \tag{2.8}$$

Avec,
$R_s$, $R_r$ : les résistances des enroulements du stator et du rotor.

**Equations des flux**

$$\begin{cases} \psi_{ST} = L_{ST} i_{ST} + M_{ST-RT} i_{RT} + M_{RT-RW} i_{RW} \\ \psi_{SW} = L_{SW} i_{SW} + M_{SW-RT} i_{RT} + M_{SW-RW} i_{RW} \\ \psi_{RT} = L_{RT} i_{RT} + M_{RT-ST} i_{ST} + M_{RT-SW} i_{SW}; \\ \psi_{RW} = L_{RW} i_{RW} + M_{RW-ST} i_{ST} + M_{RW-SW} i_{SW} \end{cases} \tag{2.9}$$

Avec,
$L_{ST}$, $L_{SW}$ et $L_{RT}$, $L_{RW}$ : respectivement, les inductances propres du stator et du rotor ;
$M_{ST-RT}$, $M_{RT-RW}$, $M_{SW-RT}$, $M_{SW-RTW}$: Les inductances mutuelles entre les phases statoriques et rotoriques.

Pour la machine idéale, on considère :

$$\begin{aligned} L_{ST} &= L_{SW} = L_s \\ L_{RT} &= L_{RW} = L_r \end{aligned} \tag{2.10}$$

Si $M_0$ est l'inductance mutuelle entre les enroulements du stator et du rotor pour $\theta$=0, alors on peut écrire :

$$\begin{cases} M_{ST-RT} = M_{SW-RW} = M_0 \cos\theta \\ M_{ST-RW} = M_{RW-ST} = -M_0 \sin\theta \\ M_{RT-SW} = M_{SW-RT} = M_0 \sin\theta \end{cases} \tag{2.11}$$

Et, les flux peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \psi_{ST} = L_s i_{ST} + M\cos\theta\, i_{RT} - M\sin\theta\, i_{RW} \\ \psi_{SW} = L_s i_{SW} + M\sin\theta\, i_{RT} + M\cos\theta\, i_{RW} \\ \psi_{RT} = L_r i_{RT} + M\cos\theta\, i_{ST} + M\sin\theta\, i_{SW} \\ \psi_{RW} = L_r i_{RW} + M\cos\theta\, i_{SW} - M\sin\theta\, i_{ST} \end{cases} \tag{2.12}$$

Les systèmes d'axes du stator ( $S_T$ $S_W$ ) et du rotor ( $R_T$ , $R_W$) tournent l'un par rapport à l'autre avec la vitesse angulaire ω ;

L'angle θ dépend de cette vitesse et varie en fonction du temps.

Les systèmes d'équation (2.8) et (2.11) obtenus sont compliqués et dépendent des coefficients variables. Donc, pour simplifier la résolution du système d'équations de départ, on lui fait subir des transformations en remplaçant les grandeurs variables naturelles (courants, flux embrassés et tensions) par d'autres grandeurs variables plus commodes à utiliser ; c'est à dire qu'il faut obtenir un système d'équations différentielles avec des coefficients constants.

A cet effet, on passe des axes naturels du stator ($S_TS_W$ ) et du rotor ($R_TR_W$) aux axes réunis (confondus) pour le stator et le rotor (U,V) qui tournent avec une vitesse quelconque $\omega_a$.

Le modèle de cette machine généralisée est représenté sur la Fig. 2.3.

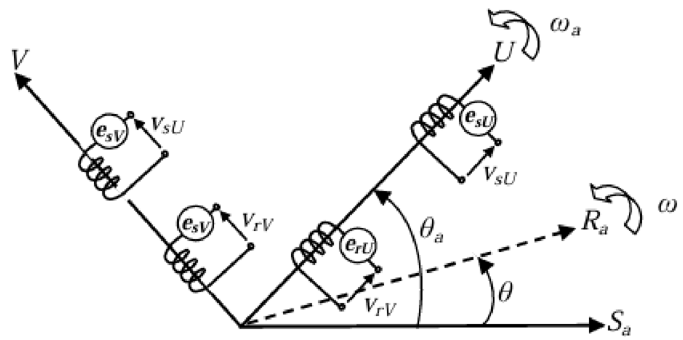


Fig.2.3 : Modèle généralisée biphasé selon les axes UV

Où,

$\theta_a$ : angle électrique entre l'axe de phase « a » du stator et l'axe « U ».

Le système d'axes de coordonnées tourne avec la vitesse $\omega_a$ par rapport au stator et avec la vitesse ($\omega_a$-ω) par rapport au rotor. Cependant, il faudrait considérer dans chaque enroulement du stator et du rotor la force électromotrice supplémentaire (e).

En considérant que les machines électriques sont symétriques, et par conséquent, il ne sera fait appel qu'au modèle biphasé.

### 2.3 Passage d'un système triphasé au système biphasé et inversement

### 2.3.1 Application de la transformation de Park au système réel abc

Il s'agit de transformer les enroulements triphasés de rotor et du stator en deux enroulements biphasés orthogonaux UV.

Soit, la figure 2.4 montrant la transformation des enroulements réels abc en enroulements orthogonaux UV.

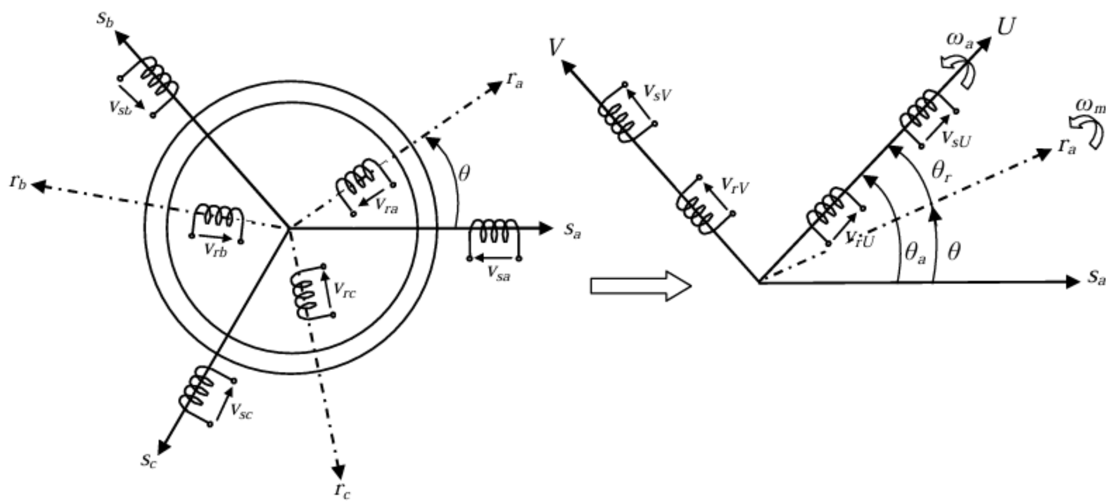


Fig. 2.4 : Passage du système triphasé abc au système biphasé UV

$\theta_r$ : Angle électrique entre l'axe de la phase « a » du rotor et l'axe V ;

$\omega_a = d\theta_a/dt$: Vitesse angulaire électrique du système d'axes UV ;

$\omega_m = d\theta_m/dt$: Vitesse angulaire électrique du rotor.

Cette transformation est définie par sa matrice de passage [P(θa)] tel que :

$$[P(\theta)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_a & \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta_a & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

La matrice de passage [P(θa)] écrite sous cette forme est orthogonale, ce qui conduit à la conservation de la puissance instantanée. ***L'orthogonalité nous permet d'écrire***:

$$[P(\theta_a)]^{-1} = [P(\theta_a)]^T = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \cos\theta_a & -\sin\theta_a & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Note : L'angle $\theta_a$ prend la valeur $\theta_S$ pour les grandeurs statoriques et donc la valeur ($\theta_r = \theta_S - \theta$) pour les grandeurs rotoriques. On a ainsi :

$$[X_{UV}] = [P(\theta_a)][X_{abc}] \quad (2.15)$$

X : représente la tension, le courant ou le flux.
Lorsque les sommes des composantes réelles (abc) sont nulles, l'équation traduisant la composante homopolaire est identiquement nulle et donc devient inutile. La transformation inverse s'écrit :

$$[X_{abc}] = [P(\theta_a)]^{-1}[X_{UV}] \quad (2.16)$$

**Equations des tensions**

$$\begin{cases} v_{sU} = R_s i_{sU} + \dfrac{d\psi_{sU}}{dt} - \omega_a \psi_{sV} \\ v_{sV} = R_s i_{sV} + \dfrac{d\psi_{sV}}{dt} + \omega_a \psi_{sU} \\ v_{rU} = R_r i_{rU} + \dfrac{d\psi_{rU}}{dt} - (\omega_a - \omega_m)\psi_{rV} \\ v_{rV} = R_r i_{rV} + \dfrac{d\psi_{rV}}{dt} + (\omega_a - \omega_m)\psi_{rU} \end{cases} \quad (2.17)$$

**Equations des flux**

$$\begin{cases} \psi_{sU} = L_s i_{sU} + M i_{rU} \\ \psi_{sV} = L_s i_{sV} + M i_{rV} \\ \psi_{rU} = L_r i_{rU} + M i_{sU} \\ \psi_{rV} = L_r i_{rV} + M i_{sV} \end{cases} \quad (2.18)$$

Avec :,
$L_S = l_S - m_S$ : Inductance cyclique propre du stator ;
$L_r = l_r - m_r$ : Inductance cyclique propre du rotor ;
$M = 3M_O/2$ : Inductance cyclique mutuelle stator - rotor.

### 2.3.2 Choix du référentiel

Pour l'étude des machines électrique en régime transitoire, on utilise trois (3) systèmes d'axes de coordonnées qui sont des cas particuliers du système d'axes « U.V ».

**Référentiel lié au stator**
Ce système d'axes est immobile par rapport au stator( $w_a$=0).
Dans ce référentiel, le système (2.17) devient et les indices U et V sont remplacés par α et β :

$$\begin{cases} v_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha} + \dfrac{d\psi_{s\alpha}}{dt} \\ v_{s\beta} = R_s i_{s\beta} + \dfrac{d\psi_{s\beta}}{dt} \\ v_{r\alpha} = R_r i_{r\alpha} + \dfrac{d\psi_{r\alpha}}{dt} + \omega_m \psi_{r\beta} \\ v_{r\beta} = R_r i_{r\beta} + \dfrac{d\psi_{r\beta}}{dt} - \omega_m \psi_{r\alpha} \end{cases} \qquad (2.19)$$

L'avantage pour ce système d'axes (α,ß) est qu'il ne nécessite pas une transformation vers le système réel.

**Référentiel lié au rotor**
Ce système d'axes est immobile par rapport au rotor donc il tourne à une vitesse $\omega_m$. De manière analogue, dans la formule (2.17) ***en prenant $\omega_a = \omega_m$*** et ***remplaçant les indices U, V par d, q*** :

$$\begin{cases} v_{ds} = R_s i_{ds} + \dfrac{d\psi_{ds}}{dt} - \omega_m \psi_{qs} \\ v_{qs} = R_s i_{qs} + \dfrac{d\psi_{qs}}{dt} + \omega_m \psi_{ds} \\ v_{dr} = 0 = R_r i_{dr} + \dfrac{d\psi_{dr}}{dt} \\ v_{qr} = 0 = R_r i_{qr} + \dfrac{d\psi_{qr}}{dt} \end{cases} \qquad (2.20)$$

**Note :** le système d'axe « d,q » est utilisé pour étudier les régimes transitoires des machines asynchrones et synchrones avec une connexion non symétrique des circuits du rotor.

**Référentiel lié au champ tournant**
Dans ce cas, les axes U et V sont fixes par rapport **a**u champ tournant.

**Note :**l'avantage de ce repere et que les grandeurs transformées selon les axes d et q deviennent des constantes (grandeurs continues)faciles à réguler lors de la commande.

$$\begin{cases} v_{ds} = R_s i_{ds} + \dfrac{d\psi_{ds}}{dt} - \omega_s \psi_{qs} \\ v_{qs} = R_s i_{qs} + \dfrac{d\psi_{qs}}{dt} + \omega_s \psi_{ds} \\ v_{dr} = R_r i_{dr} + \dfrac{d\psi_{dr}}{dt} - (\omega_s - \omega_m)\psi_{qr} \\ v_{qr} = R_r i_{qr} + \dfrac{d\psi_{qr}}{dt} + (\omega_s - \omega_m)\psi_{dr} \end{cases} \qquad (2.21)$$

### 2.4 Equation du mouvement de la machine électrique

Lors du fonctionnement à vitesse variable de la MAS, on ajoute l'équation dynamique (équation du mouvement) de la machine au système.

L'équation dynamique est :

$$\frac{Jd\Omega}{dt} = Cem - Cr - Kf.\Omega m \qquad (2.22)$$

Avec,
J : Le moment d'inertie ;
Ωm : La vitesse angulaire du rotor, ou vitesse mécanique du rotor.

$C_{em}$ : couple électromagnétique de la machine ;
$C_r$ : Le couple résistant (statique) à l'arbre de la machine ;
$K_f$ : le coefficient de frottement ;

La vitesse électrique du rotor :

$$w_m = p\Omega \qquad (2.23)$$

Où, *p : le nombre de paires de pôles.*

En tenant compte de l'expression de la vitesse électrique, l'expression (2.22) devient :

$$Cem - Cr - Kf.\Omega m = \frac{J\text{wm}}{p.dt} \qquad (2.24)$$

Dans la théorie du champ électromagnétique des machines électriques, le couple électromagnétique ( $C_{em}$) de l'équation (2.24) s'exprime par la dérivée partielle de stockage d'énergie électromagnétique par rapport à l'angulaire géométrique de rotation du rotor :

$$C_e = \frac{dW}{d\theta_{géom}} = p\frac{dW}{d\theta_{élect.}} \qquad (2.25)$$

Pour la machine électrique biphasée, l'expression de l'énergie électromagnétique est de la forme :

$$w=\frac{1}{2}(\psi_{su}.i_{su}+\psi_{sv}.i_{sv}+\psi_{ru}.i_{ru}+\psi_{rv}.i_{rv}) \tag{2.26}$$

Considérons la puissance absorbée par la machine dans un système d'axes U, V, tout en négligeant les composants homopolaires :

$$P_a = v_{su}i_{su} + v_{sv}i_{sv} \tag{2.27}$$

Où,

$$\begin{aligned} v_{su} &= R_s i_{su} + \frac{d\psi_{su}}{dt} - \psi_{sv}\omega_a \\ v_{sv} &= R_s i_{sv} + \frac{d\psi_{sv}}{dt} + \psi_{su}\omega_a \end{aligned} \tag{2.28}$$

En remplaçant $v_{su}$ et $v_{sv}$ par leurs expressions dans (2.27), on obtient :

$$\begin{aligned} P_a &= r_s i_{su}^2 + \frac{d\psi_{su}}{dt} i_{su} - \psi_{sv} i_{su}\omega_a + r_s i_{sv}^2 + \frac{d\psi_{sv}}{dt} i_{sv} + \psi_{su} i_{sv}\omega_a \\ &= \left(\frac{d\psi_{su}}{dt} i_{su} + \frac{d\psi_{sv}}{dt} i_{sv}\right) + (\psi_{su} i_{sv} - \psi_{sv} i_{su})\omega_a + \left(r_s i_{su}^2 + r_s i_{sv}^2\right) \end{aligned} \tag{2.29}$$

L'expression (2.29) est composée de trois termes :

- Le terme $\left(\frac{d\psi_{su}}{dt} i_{su} + \frac{d\psi_{sv}}{dt} i_{sv}\right)$ représente la réserve d'énergie électromagnétique ou variation d'énergie ;
- Le terme $(\psi_{su} i_{sv} - \psi_{sv} i_{su})\omega_a$ représente la puissance électromagnétique ;
- Le terme $\left(r_s i_{su}^2 + r_s i_{sv}^2\right)$ représente les pertes par effet joule.

Sachant que :

$$P_{em} = C_{em}\omega_a \tag{2.30}$$

On aura :

$$C_{em} = (\psi_{su} i_{sv} - \psi_{sv} i_{su}) \tag{2.31}$$

Avec

$$\begin{cases} \psi_{su} = L_s i_{su} + M i_{ru} \\ \psi_{sv} = L_s i_{sv} + M i_{rv} \end{cases} \tag{2.32}$$

En remplaçant $\psi_{su}$ et $\psi_{sv}$ par leurs expressions, on aura :

$$C_{em} = M(i_{ru} i_{sv} - i_{rv} i_{su}) \tag{2.33}$$

En tenant compte de (******), le couple devient,

$$C_{em} = p(\psi_{su} i_{sv} - \psi_{sv} i_{su}) \tag{2.34}$$

Où,

$$C_{em} = pM(i_{ru}i_{sv} - i_{rv}i_{su})$$

De manière analogue, on peut déterminer le couple en fonction des paramètres rotoriques. Pour ce faire, déterminons les courants en fonction des flux en multiplions la première équation du système par $L_r$ et la seconde par M et par soustraction, on obtient :

$$\psi_{su}L_r - \psi_{ruM} = (L_sL_r - M^2)i_{su} \tag{2.35}$$

On obtient l'expression du couple en fonction des flux :

$$C_{em} = \frac{pM}{L_sL_r - M^2}(\psi_{ru}\psi_{sv} - \psi_{rv}\psi_{su}) \tag{2.36}$$

Pour la machine polyphasée (m phases) ramenée à la machine biphasée, il faut multiplier toute expression du couple électromagnétique par le coefficient m/2, par exemple :

$$C_{em} = \frac{mp}{2}(\psi_{su}i_{sv} - \psi_{sv}i_{su}) \tag{2.37}$$