TD: 3 Relations Floues

- Composition des Relations floues

Soit R une relation floue sur le produit cartésien $X \times Y$ et S une relation floue sur $Y \times Z$, et T une relation floue sur$X \times Z$, $avec$ X, Y et Z des domaines du discours (ensembles de référence), alors l'ensemble floue ou relation composée max-min est définie par :

$$T = R \ o \ S = \left\{(x,z), \underbrace{max}_{y} \{\min(\mu_R(x,y), \mu_S(y,z))\}, x \in X, y \in Y \ et \ z \in Z\right\}$$

Ou en général la relation composée est définie par :

$$\mu_T(x,z) = \vee_{y \in Y}\left(\mu_R(x,y) \wedge \mu_S(y,z)\right)$$

La composition max-produit est déterminée par :

$$T = R \ o \ S = \left\{(x,z), \underbrace{max}_{y} \{\mu_R(x,y) \times \mu_S(y,z)\}, x \in X, y \in Y \ et \ z \in Z\right\}$$

ou

$$\mu_T(x,z) = \vee_{y \in Y}\left(\mu_R(x,y) \times \mu_S(y,z)\right)$$

La composition max-average est définie par :

$$T = R \ o \ S = \left\{(x,z), \frac{1}{2}\underbrace{max}_{y} \{\mu_R(x,y) + \mu_S(y,z)\}, x \in X, y \in Y \ et \ z \in Z\right\}$$

Exercice 1.

On considère les relations suivantes floues suivantes :

$$R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.8 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

Trouver la relation $T = R \ o \ S$ composée de R et S, en utilisant l'opérateur de composition :

- Max-min
- Max-produit
- Max-average

Solution :

- **Composition max-min :** $T = R \ o \ S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$
- **Composition max-produit :** $T = R \ o \ S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.56 & 0.36 & 0.42 \\ 0.64 & 0.40 & 0.32 \end{bmatrix} \end{array}$

- **Composition max-average :** $T = R\ o\ S = \begin{array}{c c} & \overbrace{\begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array}} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.75 & 0.7 & 0.75 \\ 0.8 & 0.65 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$

Exercice 2. Les relations floues

On considère une relation floue définie par :

$$\mu_R(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} \quad x \in \mathbb{R}, et\ \ y \in \mathbb{R}$$

a- Tracer la forme graphique de cette relation.

b- Déterminer le $\alpha - cut$ de cette relation pour $\alpha = 0.3$.

Solution :

a- Le graphe de cette relation est un **hyperboloïde centré sur l'origine**.

b- Le $\alpha - cut$ de cette relation pour $\alpha = 0.3$ est **un disque de rayon =** $\sqrt{\frac{7}{3}}$ **.**

Exercice 3. Produit Cartésien et Composition

Soit A un ensemble flou défini sur l'univers de discours X et B un autre ensemble flou defini sur l'univers de discours Y. Le produit cartésien entre les ensembles flous A et B produit une relation floue telle que :

$$A \times B = R \text{ défini } sur\ X \times Y \text{ ayant pour fonction d'appartenance :}$$

$$\mu_R(x,y) = \mu_{A\times B}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

- On considere 2 ensembles flous A et B, où A représente 3 mesures de température

$x\ = \{x_1, x_2, x_3\}$ et B représente le débit $y = \{y_1, y_2\}$. Trouver le produit cartésien flou entre A et B avec :

$$A = \{0.4/x_1\,, 0.7/x_2\,, 0.1/x_3\}\ et\ B = \{0.5/y_1\,, 0.8/y_2\}$$

Solution :

On a $\mu_A(x) = [0.4 \quad 0.7 \quad 0.1]\ et\ \ \mu_B(y) = [0.5 \quad 0.8]$.

Le produit cartésien flou entre A et B donne la relation floue R suivante :

$$A \times B = R \rightarrow\ \mu_R(x,y) = \mu_{A\times B}(x,y) = min_{x,y}\big(\mu_A(x), \mu_B(y)\big) = [\mu_A(x)]^T \wedge [\mu_B(y)]$$

Ce qui donne :

$$\mu_R(x,y) = \mu_{A\times B}(x,y) = min(\ \mu_A(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}), \mu_B(\ [y_1 \quad y_2]\ ))$$

$$\boldsymbol{\mu_R(x,y) = \mu_{A\times B}(x,y) =} \begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{cc} \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{y_2} \end{array}} \\ \begin{array}{c} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{array} & \begin{bmatrix} \mathbf{0.4} & \mathbf{0.4} \\ \mathbf{0.5} & \mathbf{0.7} \\ \mathbf{0.1} & \mathbf{0.1} \end{bmatrix} \end{array}$$