② **Chap 2** **Ensembles, applications, relations**

2ème cours "Covid 20-21"

Ensembles

Déf. Un ensemble est une collection d'objets (appelés éléments), entre lesquels peuvent exister des relations diverses.

- $x \in E$ signifie x appartient à l'ens E.
- $x \notin E$ " x n'appartient à " E.
- On note $\emptyset$ l'ens vide qui n'a aucun élét.

Exemple 1) L'ens $\{0, 1, 2\}$ est l'ens constitué de 3 éléts 0, 1 et 2.

2) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\} = [0, 1]$

Inclusion

Déf. On dit qu'un ens F est inclus dans un ens E (ou que F est une partie de E), ~~si tous les éléts de F sont éléts de E~~. On note

$$F \subset E.$$

$$F \subset E \iff \forall x\, F,\ x \in E.$$

Egalité de 2 ensembles

$E = F$ si et seulement si (ssi)

$$E \subset F \text{ et } F \subset E$$

Propriétés $E \subset E$, $\emptyset \subset E$,

$$A \subset B \text{ et } B \subset C \Longrightarrow A \subset C.$$

Notation Pour tout ens E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ens des parties (ou sous-ensembles) de E.

Exemple : $E = \{0, 1\}$, $\mathcal{P}(E) \stackrel{?}{=}$

OPERATIONS DS $\mathcal{P}(E)$

Déf. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$, alors :

- La réunion de A et B, notée $A \cup B$ est l'ens définie par :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- L'intersection de A et B, notée $A \cap B$ est l'ens définie par :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

- Le complémentaire de A ds E, notée $C_E A$ est l'ens défini par :

$$C_E A = \{ x \in E \mid x \notin A \}.$$

- La différence de A et B, notée $A - B$ est l'ens défini par :

$$A - B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B \}.$$

<u>Propriétés</u>

1. Encadrement : $\begin{cases} A \cap B \subset A \subset A \cup B \\ A \cap B \subset B \subset A \cup B \end{cases}$

2. Commutativité : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$

3. Associativité : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4. Distributivité :
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5. $C_E C_E A = A$.

6. $C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$.

7. $C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

8. $\begin{cases} A \cup \emptyset = A, & A \cup A = A \\ A \cap E = A, & A \cap A = A \end{cases}$

9. $A \subset B$
   $C \subset D$
   $\Rightarrow \begin{cases} A \cup C \subset B \cup D \\ A \cap C \subset B \cap D \end{cases}$

10. $A \subset B$
   $\Rightarrow B^c \subset A^c$

Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles

<u>Déf.</u> Soit E et F 2 ens. On appelle produit cartésien de E par F l'ens $E \times F$ des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$

$$E \times F = \{(x,y) ; x \in E, y \in F\}.$$

Plus généralement, le produit de n ens E_i est

$$E_1 \times E_2 \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \ldots x_n \in E_n\}.$$

Applications

<u>Déf</u>: On définit une application f par :

- Un ens de départ (ou de définition) E
- Un ens d'arrivée F
- et par la donnée pour chaque

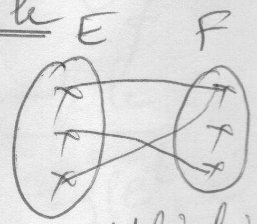
élt x de E d'un élt unique ds F noté $f(x)$ appelé image de x.

- Soit $y \in F$, lorsqu'il existe $x \in E$ t.q $y = f(x)$. On dit que x est un antécédent de y.

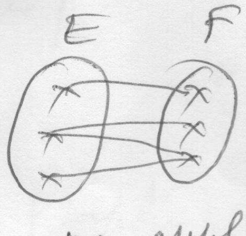
<u>Notation d'1 fonction:</u>

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

<u>Exemple</u>



application



non appl.

<u>Notation</u> L'ens des applications de E ds F est noté

$$F^E.$$

<u>Egalité de 2 applications</u>

2 applications f et g sont égales, si elles ont même ens de départ E, même ens d'arrivé F et

$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x).$

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - 1$

alors $f = g$.

1. $f(0) = g(0)$
2. $x \neq 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$

Graphe d'1 application

Le graphe de $f : E \to F$ est

$$\mathcal{C}_f = \{ (x, f(x)) : x \in E \}.$$

Exemple

$G_1 = \{ (e^t, e^{2t}) : t \in \mathbb{R} \}$ est le graphe d'1 fonction, mais

$G_2 = \{ (t^2, t^3) : t \in \mathbb{R} \}$ n'est pas un graphe d'1 fonction.

pour G_1 : soit $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

Déf L'application $id_E : E \to E$, $x \mapsto x$ est appelée l'application identité.

Fonctions indicatrices

Déf: Soit E un ens et $A \subset E$. La fonction indicatrice de A notée 1_A est l'application

$$1_A : E \longrightarrow \{0,1\}$$
$$x \longmapsto 1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Propriétés:

1) $A = B \iff 1_A = 1_B$

2) $1_{A \cap B} = 1_A \times 1_B$

3) $1_{C_E A} = 1 - 1_A$

4) $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A \cdot 1_B$.

(2)

Déf Soit $f : E \longrightarrow F$ et $E' \subset E$

La restriction de f à E' est l'application

$$f_{/E'} : E' \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x).$$

-3e cours
Covid 20/21-

Déf (Composition)

La composée de 2 applications

$f : E \to F$ et $g : F \longrightarrow G$

est l'application

$$g\circ f : E \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto g\circ f(x) = g[f(x)].$$

Diagramme :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g[f(x)] \end{tikzcd}$$

Remarque (Rq)

1) Si $f : E \to F$, alors $f\circ Id_E = f$ et $Id_F \circ f = f$.

2) En général $f\circ g \neq g\circ f$.

3) $(f\circ g)\circ g = f\circ (g\circ h)$

Image, image réciproque

Soit $f : E \longrightarrow F$, $A \subset E$, $B \subset F$

On appelle image de A par f

l'ens $f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$

$= \{ y \in F \mid \exists x \in A \, ; \, y = f(x) \}$.
t.q (vérifiant)

* L'ens $f(E)$ est appelé image de f noté $\operatorname{Im} f$ $\quad (\operatorname{Im} f = f(E))$

<u>Exemple</u> $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$. on obtient :

$f(0) = 0$, $f([0,1]) = [0,1]$, $f([-1,1]) = [0,1]$

- On appelle image réciproque de B par f l'ens $f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}$.

<u>Exemple</u> $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

$f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ $\quad f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$.

$f^{-1}([0,4]) = [-2, 2]$

<u>A retenir</u>

$y \in f(A) \iff \exists x \in A \, ; \, y = f(x)$

$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

<u>Rq</u> $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset f^{-1}(f(A))$

$\forall B \in \mathcal{P}(F) \quad f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Injection, surjection, bijection

Déf : Soit $f : E \longrightarrow F$

— f est injective si

tout $y \in F$ a au plus un antécédent $x \in E$

$\forall y \in F$, Card $f^{-1}(\{y\}) \leq 1$

$$\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

— f est surjective si

tout $y \in F$ a au moins un antécédent $x \in E$

$$\forall y \in F, \ \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

— f est bijective si f est inj + f est surj

$$\forall y \in F, \ \exists! \, x \in E, \quad y = f(x).$$

Exemple 1

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ n'est ni injective, ni surjective

- $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^2$ est surjective mais pas inj

- $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ est injective mais pas surjective.

Exemple 2 Soit $\phi \neq A \subset E$ et

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$
$$X \longmapsto X \cup A$$

$f(\phi) = f(A)$ n'est pas injective

$\phi = f(X) = X \cup A$

Exercice Soit $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$
$(p,q) \longmapsto (2p+1)2^q$

Montrer que f est bijective.

Déf (Application réciproque)

Pour toute application bijective $f : E \to F$ on définit l'application réciproque

$$f^{-1} : F \longrightarrow E$$
$$b \longmapsto f^{-1}(b) = \text{l'unique antécédent de } b \text{ par } f.$$

- On a toujours :

→ $f\circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1}\circ f = Id_E$.

→ $\forall (x,y) \in E\times F \quad y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Exemple

(1) $Id_{\mathbb{R}}$ est bijective et $Id_{\mathbb{R}}^{-1} = Id_{\mathbb{R}}$.

(2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x+1$ est bijective et $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

Proposition 1. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$

1) Si f et g sont inj, alors $g \circ f$ est inj.

2) Si f et g sont surj, alors $g \circ f$ est surj.

3) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective

et on a : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4) Si f est bij alors f^{-1} est bij

et on a $(f^{-1})^{-1} = f$.

Prop 2 Soit $E \xrightarrow{f} F$ et $F \xrightarrow{g} G$

Si $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$

alors f et g sont bijective et réciproques l'une de l'autre.

Prop 3. Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

1) Si $g \circ f$ est inj alors f est inj

2) Si $g \circ f$ est surj alors g est surj.