Badji Mokhtar – Annaba University
Faculty of Technology
Department of Informatics

L1 Informatics
Algebra 2

2024/2025
Time : 1h30

Algebra 2 Exam

Exercice: 1 ***(10 points)***

Let f be function defined from $\mathbb{R}^4$ to $\mathbb{R}^4$ by :

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, 0, x + y - z + t, t)$$

1. *Show that f is a linear function.*
2. *Determine a basis of the $\ker(f)$ and deduce its dimension.*
3. *Is the function f injective ?*
4. *Give the rank of f. Is the function f surjective ?*
5. *Let E subset of $\mathbb{R}^4$ defined by :*

$$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \quad x + y - z + t = 0\right\}$$

   a. *Show that E is a vector subspaces of $\mathbb{R}^4$.*

   b. *Give a basis for E and deduce its dimension.*

   c. *Are E and $\ker(f)$ supplementary ?*

Exercice: 2 ***(10 points)***

Let the matrix : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. *Show that A is invertible.*
2. *Calculate : $A^3 - A^2 - A$, then deduce the inverse matrix of A.*
3. *Using question [1], show that A^2 is invertible and calculate its inverse.*
4. *Let the following system of equations :*

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \tag{S}$$

   a. *Write the system (S) in matrix form.*

   b. *Show that this system (S) is a Cramer's system.*

   c. *Find the solution of the system (S).*

L1 Informatique
Algèbre 2

Université Badji Mokhtar Annaba
Faculté Des Technologies

Département d'informatique

2024/2025
Durée : 1h30

Examen D'Algèbre 2

Exercice 1 ***(10 points)***

On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *définie par :*

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, 0, x + y - z + t, t)$$

1. *Montrer que* f *est une application linéaire.*
2. *Déterminer une base du* $\ker(f)$ *et déduire sa dimension.*
3. *L'application* f *est-elle injective ?*
4. *Donner le rang de* f*. L'application* f *est-elle surjective ?*
5. *Soit* E *une partie de* $\mathbb{R}^4$ *définie par :*

$$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \quad x + y - z + t = 0\right\}$$

   a. *Montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

   b. *Déterminer une base de* E*, puis déduire sa dimension.*

   c. E *et* $\ker(f)$ *sont-ils supplémentaires ?*

Exercice 2 ***(10 points)***

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que* A *est inversible.*
2. *Calculer :* $A^3 - A^2 - A$*, puis déduire la matrice inverse de* A.
3. *En utilisant la question* [1] *, montrer que* A^2 *est inversible et calculer son inverse.*
4. *Soit le système d'équation suivant :*

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

   a. *Ecrire le système (S) sous le forme matricielle.*

   b. *Montrer que ce système (S) est un système de Cramer.*

   c. *Trouver la solution du système (S).*

Corrigé de l'examen d'algèbre 2

Exercice 01 On a : $f(x,y,z,t) = (x-y+z, 0, x+y-z+t, t)$ 0,25

1) f est une A.L ssi : $\forall u, v \in \mathbb{R}^4, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : \boxed{f(\lambda u + \beta v) = \lambda f(u) + \beta f(v)}$

$u \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow u = (x,y,z,t) \Rightarrow f(u) = f(x,y,z,t) = (x-y+z, 0, x+y-z+t, t)$

$v \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow v = (x',y',z',t') \Rightarrow f(v) = f(x',y',z',t') = (x'-y'+z', 0, x'+y'-z'+t', t')$

$\lambda u + \beta v = \lambda(x,y,z,t) + \beta(x',y',z',t') = (\lambda x + \beta x', \lambda y + \beta y', \lambda z + \beta z', \lambda t + \beta t')$ 0,25

On a : $f(\lambda u + \beta v) = f(\lambda x + \beta x', \lambda y + \beta y', \lambda z + \beta z', \lambda t + \beta t')$ 0,5

$= (\lambda x + \beta x' - \lambda y - \beta y' + \lambda z + \beta z', 0, \lambda x + \beta x' + \lambda y + \beta y' - \lambda z - \beta z' + \lambda t + \beta t', \lambda t + \beta t')$

$= (\lambda x - \lambda y + \lambda z, 0, \lambda x + \lambda y - \lambda z + \lambda t, \lambda t) + (\beta x' - \beta y' + \beta z', 0, \beta x' + \beta y' - \beta z' + \beta t', \beta t')$

$= \lambda(x-y+z, 0, x+y-z+t, t) + \beta(x'-y'+z', 0, x'+y'-z'+t', t')$

$= \lambda f(u) + \beta f(v)$ 1

alors f est une A.L

2) Base du $\mathrm{Ker}(f)$

On a : $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : f(x,y,z,t) = 0_{\mathbb{R}^4}\}$ 0,25

$f(x,y,z,t) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z + t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ 0,25 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ t = 0 \end{cases}$

alors : $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = t = 0 \text{ et } y = z\}$

$= \{(0, z, z, 0), z \in \mathbb{R}\}$

$= \{z(0,1,1,0), z \in \mathbb{R}\}$ 0,5

donc : $\{(0,1,1,0)\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$

Puisque $(0,1,1,0) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ alors $\{(0,1,1,0)\}$ est libre.

Par la suite $\boxed{\{(0,1,1,0)\}}$ est une base de $\ker(f)$ et 0,5

$\boxed{\dim(\ker f) = 1}$ 0,5

3) On a : $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\} \Rightarrow f$ n'est pas injective. 0,5

4) On a : $Rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\ker f)$

$= 4 - 1 = 3$

$\Rightarrow \boxed{Rg(f) = 3}$ 0,5

f n'est pas surjective car : $\dim(\operatorname{Im} f) \neq \dim(\mathbb{R}^4)$ 0,5

5) Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z+t = 0\}$

a) E s.e.v de $\mathbb{R}^4$ ssi : $\begin{cases} E \neq \emptyset \Leftarrow 0_{\mathbb{R}^4} \in E \\ \forall u,v \in E,\ \forall \lambda,\beta \in \mathbb{R} : \lambda u + \beta v \in E \end{cases}$ 0,25

- On a : $0+0-0+0 = 0$ alors $0_{\mathbb{R}^4} \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$ 0,5
- $\lambda u + \beta v = (\lambda x + \beta x', \lambda y + \beta y', \lambda z + \beta z', \lambda t + \beta t')$ 0,25

On a : $(\lambda x + \beta x') + (\lambda y + \beta y') - (\lambda z + \beta z') + (\lambda t + \beta t')$

$= \lambda(x+y-z+t) + \beta(x'+y'-z'+t')$

$= \lambda(0) + \beta(0) = 0$ 1

alors : $\lambda u + \beta v \in E$, Par la suite E est un s.e.v de $\mathbb{R}^4$

b) Base de E :

$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z+t=0\}$

$= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : z = x+y+t\}$

$= \{(x,y,x+y+t,t) ; x,y,t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x,0,x,0)+(0,y,y,0)+(0,0,t,t) ; x,y,t \in \mathbb{R}\}$ 1

$= \{x(1,0,1,0)+y(0,1,1,0)+t(0,0,1,1) ; x,y,t \in \mathbb{R}\}$

Alors : $B = \{(1,0,1,0) ; (0,1,1,0) ; (0,0,1,1)\}$ est une

famille génératrice de E.

$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ on a : $\lambda_1(1,0,1,0)+\lambda_2(0,1,1,0)+\lambda_3(0,0,1,1) = 0_{\mathbb{R}^4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B$ est libre 0,5

Par la suite B est une base de E et $\boxed{\dim E = 3}$ 0,5

c) On remarque que $\mathrm{Ker}(f) \cap E = \{(0,1,1,0)\}$

donc : $\mathrm{Ker}(f) \cap E \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

d'où E et $\mathrm{Ker} f$ ne sont pas supplémentaire. 0,5

Exercice 02 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) A est inversible ssi : $\det(A) \neq 0$

On a : $\det(A) = -1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(1) = -1 \neq 0$ 1

alors : A est inversible.

2) Calculons : $A^3 - A^2 - A$

$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5

et $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 0,5

donc : $A^3 - A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$ 0,5

La matrice inverse :

0,5

$A^3 - A^2 - A = -I_3 \Rightarrow A + A^2 - A^3 = I_3 \Rightarrow \boxed{A(I_3 + A - A^2) = I_3}$

donc : $A^{-1} = I_3 + A - A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 1

3) Montrons que A^2 est inversible et calculons son inverse

On a : $A \times A^{-1} = I_3 \Rightarrow A \times A \times A^{-1} = A \times I_3$

$\Rightarrow A^2 \times A^{-1} = A \Rightarrow A^2 \times A^{-1} \times A^{-1} = A \times A^{-1}$ 1

alors : $A^2 \times (A^{-1})^2 = I_3$

donc : A^2 est inversible et son inverse est :

$$(A^{-1})^2 = A^{-1} \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 1$$

4) Soit : $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

a) La forme Matricielle :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A^{-1})^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 1$$

b) (S) est système de Cramer car :

- $n = p = 3$.
- $\det\left[(A^{-1})^2\right] = 1 \neq 0$ 1

c) La solution de (S)

$$(A^{-1})^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 2$$