

COURS SUR METHODES NUMERIQUES ET
APPROXIMATIONS
pour Master 1 Électrotechniques

HARBI ABIDA

TABLE DES MATIÈRES

1	Rappels sur quelques méthodes numériques	1
1	Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes itératives	2
1.1	Méthode de Jacobi	3
1.2	Méthode de Gauss-Seidel	6
1.3	Méthode de relaxation (SOR. Successive Over Relaxation) . .	9
1.4	La méthode de Gradient	10
2	Résolution des systèmes d'équations nonlinéaires par les méthodes itératives	11
2.1	Rappel sur quelques notions de base du calcul différentiel . . .	11
2.2	La méthode de Newton	12
2.3	Méthode des approximations successives	13
3	Série d'exercices 1	13

Corrigé série 116	
5	Intégration numérique 31
5.1	La méthode des Trapèzes 31
5.2	La méthode de Simpson 32
5.3	La méthode des rectangles 33
6	Série d'exercices 2 34
7	Résolution numérique des équations différentielles ordinaires 41
7.1	La méthode d'Euler 41
7.2	La méthode de Runge-Kutta 44
8	Série d'exercices 3 46
8.1	Corrigé série 3 49

PREFACE

This is the preface. It is an unnumbered chapter. The [markboth] \TeX field at the beginning of this paragraph sets the correct page heading for the Preface portion of the document. The preface does not appear in the table of contents.

CHAPITRE 1

RAPPELS SUR QUELQUES MÉTHODES
NUMÉRIQUES

1 Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes itératives

Soit un système d'équations linéaires

$$AX = b \tag{1.1}$$

où $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée d'ordre n et inversible ($\det A \neq 0$), b un vecteur de \mathbb{R}^n . Les méthodes itératives pour la résolution des systèmes d'équations linéaires consistent à construire une suite de vecteurs (X_k) ; $k \in \mathbb{N}$ et $X_k \in \mathbb{R}^n$ laquelle converge vers la solution (le vecteur) $X \in \mathbb{R}^n$ de $AX = b$. On décompose la matrice A sous la forme de la soustraction de deux matrices carrées d'ordre n

$$A = M - N$$

où M est une matrice inversible. La solution X de (1.1) vérifie alors

$$X = M^{-1}NX + M^{-1}b$$

La méthode itérative pour la résolution du système (1.1) est définie par

$$\begin{cases} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = M^{-1}NX_k + M^{-1}b; k \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Lorsque la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente, sa limite est solution du système (1.1)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k = X$$

D'un point de vue pratique il faut savoir à quel moment X_k est suffisamment proche du vecteur solution X . On introduit alors un test d'arrêt

$$\|X_k - X\| < \epsilon$$

où ϵ est la précision désirée, $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^n laquelle est définie par $\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Définition 1.1 Soit A une matrice carrée quelconque. Le rayon spectral de la matrice A qu'on note par $\rho(A)$ est par définition la plus grande valeur propre en valeur absolue, de la matrice A :

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda_i(A)| ; i = 1, \dots, n \}.$$

Proposition 1.1 La méthode itérative (1.2) converge si et seulement si le rayon spectral de la matrice $M^{-1}N$ est strictement inférieur à un

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

1.1 Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi repose sur la décomposition de la matrice A du système (1.1) comme suit

$$A = D - N$$

où $D = \text{Diag}(a_{ii})$ est la matrice diagonale formée des éléments diagonaux de A ; S'ils sont tous non nuls la matrice D est inversible. La méthode de Jacobi s'écrit alors

$$\begin{cases} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = D^{-1}NX_k + D^{-1}b; k \geq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

La matrice

$$J = D^{-1}N$$

est dite la matrice de Jacobi. On peut formuler la méthode de Jacobi de la manière équivalente suivante ; sachant que $X_k = (X_{1,k}, \dots, X_{n,k}) \in \mathbb{R}^n$

$$X_{i,k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} X_{j,k} \right); \quad k \geq 0 \text{ et } i = 1, \dots, n$$

Définition 1.2 On dit qu'une matrice A est à diagonale dominante stricte si quelque soit $i = 1, \dots, n$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Proposition 1.2 Si la matrice A du système (1.1) est à diagonale dominante stricte alors $\rho(D^{-1}N) < 1$ et la méthode de Jacobi converge.

Exemple 1.1 On considère un exemple dans \mathbb{R}^3 : Soit respectivement la matrice

A d'ordre 3 et le vecteur b dans \mathbb{R}^3

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur initial

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

et la précision $\epsilon = 10^{-2}$. On effectue la décomposition de la matrice A

$$A = D - N = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{4} I_D$$

où I_D est la matrice identité. La matrice J de Jacobi est alors

$$J = D^{-1}N = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D^{-1}b = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La méthode de Jacobi s'écrit alors

$$X_{k+1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_k - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad k \geq 0$$

X_0 le vecteur initial

Ainsi

$$k = 0: X_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_0 - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$k = 1: X_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_1 - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ 0 \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{16} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$k = 2: X_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_2 - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{16} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{64} \\ -\frac{3}{8} \\ -\frac{21}{64} \end{pmatrix}$$

On regroupe les résultats dans le tableau qui suit

k	X_k	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (0.5, 0.5, 0.5)^T$.
1	$X_1 = \left(-\frac{1}{8}, 0.5, -\frac{1}{8}\right)^T$	$\ X_1 - X_0\ = 0.883883 > \epsilon$
2	$X_2 = (-0.25, -0.3125, -0.25)^T$	$\ X_2 - X_1\ = 0.359035 > \epsilon$
3	$X_3 = (-0.328125, -0.375, -0.328125)^T$	$\ X_3 - X_2\ = 0.126938 > \epsilon$
4	$X_4 = \left(-\frac{11}{32}, -\frac{53}{128}, -\frac{11}{32}\right)^T$	$\ X_4 - X_3\ = 0.044879 > \epsilon$
5	$X_5 = \left(-\frac{181}{512}, -\frac{27}{64}, -\frac{181}{512}\right)^T$	$\ X_5 - X_4\ = 0.015867 > \epsilon$
6	$X_6 = \left(-\frac{91}{256}, -\frac{437}{1024}, -\frac{91}{256}\right)^T$	$\ X_6 - X_5\ = 0.005609 > \epsilon$
7	$X_7 = \left(-\frac{1461}{4096}, -\frac{219}{512}, -\frac{1461}{4096}\right)^T$	$\ X_7 - X_6\ = 0.001983 > \epsilon$
8	$X_8 = \left(-\frac{731}{2048}, -\frac{3509}{8192}, -\frac{731}{2048}\right)^T$	$\ X_8 - X_7\ = 0.000701 = 0.0701 < 10^{-2}$

(Tableau 1.1)

Ainsi $X_8 = (-0.35693, -0.42834, -0.35693)^T$ est la solution approchée de X par la méthode itérative de Jacobi avec la précision $\epsilon = 10^{-2}$: On calcule le rayon spectral de la matrice J . Les valeurs propres de la matrice J sont solution de l'équation

$$\det(J - \lambda I_D) = 0$$

Donc

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & \frac{1}{4} \\ 0 & & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 = 0$$

Par conséquent

$\lambda_i(J) = 0$ ce qui implique $\rho(J) = 0 < 1$; la méthode de Jacobi converge.

1.2 Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel repose sur la décomposition de la matrice A du système (1.1) comme suit

$$A = M - N$$

où la matrice M est la matrice triangulaire inférieure

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La méthode de Gauss-Seidel s'écrit alors

$$\begin{cases} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = M^{-1}NX_k + M^{-1}b; \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

La matrice

$$G = M^{-1}N$$

est dite la matrice de Gauss-Seidel. L'écriture explicite de la méthode de Gauss-Seidel

$$X_{i,k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}X_{j,k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}X_{j,k} \right); \quad k \geq 0 \text{ et } i = 1, \dots, n.$$

Proposition 1.3 Si la matrice A du système (1.1) est à diagonale dominante stricte alors $\rho(M^{-1}N) < 1$ et la méthode de Gauss-Seidel converge.

Exemple 1.2 On reprend le même exemple traité pour la méthode de Jacobi et on résout le système par la méthode de Gauss-Seidel, les matrices

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice G de la méthode de Gauss-Seidel pour cet exemple est

$$G = M^{-1}N = -\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 0 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 0 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Le vecteur

$$M^{-1}b = -\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

On trouve le tableau suivant

k	X_k	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (0.5, 0.5, 0.5)^T$.
1	$X_1 = \left(-\frac{1}{8}, -\frac{5}{32}, -\frac{18.5}{64}\right)^T$	$\ X_1 - X_0\ = 19.021600 > \epsilon$
2	$X_2 = \left(-\frac{37}{128}, -\frac{101}{256}, -\frac{357}{1024}\right)^T$	$\ X_2 - X_1\ = 0.295369 > \epsilon$
3	$X_3 = \left(-\frac{357}{1024}, -\frac{869}{2048}, -\frac{2917}{8192}\right)^T$	$\ X_3 - X_2\ = 0.067016 > \epsilon$
4	$X_4 = \left(-\frac{2917}{8192}, -\frac{7013}{16384}, -\frac{23397}{65536}\right)^T$	$\ X_4 - X_3\ = 0.008377 > \epsilon$
5	$X_5 = \left(-\frac{23397}{65536}, -\frac{56165}{131072}, -\frac{187237}{524288}\right)^T$	$\ X_5 - X_4\ = 0.001047 > \epsilon$
6	$X_6 = \left(-\frac{187237}{524288}, -\frac{449381}{1048576}, -\frac{1497957}{4194304}\right)^T$	$\ X_6 - X_5\ = 0.000130 = 0.13 \times 10^{-3} < \epsilon$

(Tableau 1.2)

Ainsi $X_6 = (-0.357126, -0.428563, -0.357140)^T$ est la solution approchée de X par la méthode itérative de Gauss-Seidel avec la précision $\epsilon = 10^{-3}$. On peut rajouter la remarque que X_6 est la solution approchée de X avec trois chiffres significatifs exacts après la virgule.

1.3 Méthode de relaxation (SOR. Successive Over Relaxation)

La méthode de relaxation repose sur la décomposition de la matrice A du système du système (1.1) comme suit

$$A = D - E - F$$

où

$D = \text{Diag}(a_{ii})$ est la matrice diagonale formée des éléments diagonaux de A

$-E$ est la partie triangulaire inférieure stricte de la matrice A .

$-F$ est la partie triangulaire supérieure stricte de la matrice A .

On appelle la méthode de relaxation pour le paramètre ω , la méthode itérative associée à la décomposition

$$M = \frac{1}{\omega}D - E \text{ et } N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$$

La méthode de relaxation s'écrit alors

$$\begin{cases} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right) X_k + \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} b; \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

La matrice de la méthode de relaxation est R_ω

$$R_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$$

L'écriture explicite de la méthode de relaxation est

$$X_{i,k+1} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_{j,k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_{j,k} \right) + (1-\omega) X_{i,k}; \quad k \geq 0 \text{ et } i = 1, \dots, n.$$

Remarque 1.1 Pour que la méthode de relaxation soit bien définie il faut que la matrice D soit non singulière.

- Si $\omega = 1$; on retrouve la méthode de Gauss-Seidel.
- Si $\omega < 1$; c'est une méthode de sous-relaxation.
- Si $\omega > 1$; c'est une méthode de sur-relaxation.

Proposition 1.4 Si la matrice A du système (1.1) est symétrique définie positive alors la méthode de relaxation converge pour $\omega \in]0, 2[$.

1.4 La méthode de Gradient

Soit un paramètre réel $\alpha \neq 0$. On appelle méthode de Gradient la méthode itérative associée à la décomposition suivante de la matrice A du système (1.1) ;

$$M = \frac{1}{\alpha}D \text{ et } N = \frac{1}{\alpha}D - A$$

La méthode de Gradient s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = \left(\frac{1}{\alpha}D\right)^{-1} \left(\frac{1}{\alpha}D - A\right) X_k + \left(\frac{1}{\alpha}D\right)^{-1} b \\ \qquad \qquad = (I_D - \alpha A) X_k + \alpha D^{-1}b; \quad k \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

La matrice

$$G_{GRADIENT} = I_D - \alpha A.$$

est dite la matrice de Gradient.

Proposition 1.5 Si la matrice A du système (1.1) est symétrique définie positive S.D.P. alors la méthode de Gradient converge si $\alpha \in \left]0, \frac{2}{\lambda_{\min}(A)}\right[$ où $\lambda_{\min}(A)$ est la plus petite valeur propre de la matrice A et la choix optimal de la valeur de α est

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A)}.$$

2 Résolution des systèmes d'équations nonlinéaires par les méthodes itératives

Considérons une fonction

$$\begin{aligned} f & : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X & = (x_1, \dots, x_n)^T \rightarrow f(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))^T \end{aligned}$$

L'équation $f(X) = 0$ représente un système de n équations nonlinéaires à n inconnues x_1, \dots, x_n que l'on peut écrire sous la forme suivante

$$f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(X) \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n}. \quad (1.7)$$

où les fonctions $f_i(X)$; $i = 1, \dots, n$ sont les applications coordonnées de f .

2.1 Rappel sur quelques notions de base du calcul différentiel

Soit une fonction $g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $X \in U$. La dérivée de la fonction $g(X)$ est la forme linéaire $Dg(X)$

$$\begin{aligned} Dg(X) & : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ Dg(X)(Y) & \rightarrow \langle Dg(X), Y \rangle \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire dans \mathbb{R} et est défini par : Pour tous vecteurs $X; Y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (1.8)$$

$\nabla g(X)$ est le gradient de la fonction $g(X)$ et est défini par

$$\nabla g(X) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(X), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(X) \right)^T. \quad (1.9)$$

Pour une application vectorielle $f(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))^T$

$$Df(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X) \end{pmatrix}$$

La matrice

$$J_f(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X) \end{pmatrix}$$

est dite la matrice Jacobienne de f .

2.2 La méthode de Newton

La méthode de Newton pour la résolution du système (1.7) consiste à calculer la suite (X_k) ; $k \in \mathbb{N}$ et $X_k \in \mathbb{R}^n$, définie par

$$\begin{cases} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = X_k - (J_f(X_k))^{-1} f(X_k); k \geq 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Ainsi pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$ on doit calculer

$$J_f(X_k), (J_f(X_k))^{-1} \text{ et } f(X_k).$$

2.3 Méthode des approximations successives

L'idée principale de la méthode des approximations successives consiste à écrire le système (1.7) sous la forme

$$g(X) = X \quad (1.11)$$

Donc X est un point fixe de l'application $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et la méthode des approximations successives est définie par

$$\begin{cases} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = g(X_k); k \geq 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Proposition 1.6

Si l'application $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ et toutes les valeurs propres de la matrice $Jg(X)$ sont strictement inférieures un, alors la méthode des approximations successives converge vers la solution X du système (1.7).

3 Série d'exercices 1

Université Badji-Mokhtar-Annaba
Département Électrotechniques
Master I

Année 2020-2021

Série 1 : Méthodes Itératives Système Linéaires et Nonlinéaires

Exercice 1 Considérons le système linéaire dans \mathbb{R}^3 suivant

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 7 \end{cases}$$

1. Montrer que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Saidel convergent.

2. Calculer la matrice d'itération J de Jacobi et G de Gauss-Seidel.
3. En partant de la donnée initiale $X^{(0)} = (1, 0.8, 0.8)^T$ calculer la solution approchée $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ par la méthode de Jacobi à 10^{-2} près en utilisant le critère d'arrêt sur l'incrément.

Exercice 2 Calculer le rayon spectral de la matrice de Jacobi et la matrice de Gauss-Seidel pour les deux matrices A et B suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 Considérons la matrice tri-diagonale suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est symétrique définie positive.
2. Sachant que la matrice B_{GR} de la méthode du gradient associé à la résolution du système linéaire $Ax = b$ est définie par

$$B_{GR} = I_D - \alpha A$$

où I_D est la matrice identité, déterminer pour quelles valeurs de α la méthode du gradient converge.

- (a) Calculer les cinq premières itérations par les méthodes du gradient en partant de $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$.
3. Appliquer la méthode de relaxation pour la résolution du système linéaire $Ax = b$ pour $w = 1.25$.
4. On prend $b = (24, 30, -24)^T$ et en partant de $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ calculer les cinq premières itérations par les méthodes de Gauss-Seidel et de relaxation.

3. Série d'exercices 1

Exercice 4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle définie positive.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[$ la méthode de relaxation converge pour tout $w \in]0, 2[$.
3. Ecrire la matrice J de Jacobi correspondante. Pour quelles valeurs de α la méthode de Jacobi converge.
4. Ecrire la matrice G de Gauss-Saidel correspondante. Calculer $\rho(G)$.

Exercice 5 On considère le système non linéaire

$$\begin{cases} ye^x - 2 = 0 \\ y + x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

1. Faire une itération de la méthode de Newton en partant de l'approximation initiale $(x^0, y^0) = (0, 1)$.
2. Est-il possible de prendre l'approximation initiale $(x^0, y^0) = (1, 2)$.

Exercice 6 On veut résoudre le système non linéaire

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + xy + z^2 = 1 \end{cases}$$

1. Effectuer 3 itérations de la méthode de Newton en partant du vecteur initial $(x^0, y^0, z^0) = (0.75, -0.75, 0.75)$.
2. Pour quels vecteurs initiaux ne peut-on pas démarrer l'algorithme.

Corrigé série 1

Exercice 1

La matrice du système linéaire est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -8 & 5 \\ 3 & -5 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Pour que les deux méthodes itératives de Jacobi et de Gaus-Seidel convergent il suffit que la matrice A du système linéaire soit à diagonale dominante stricte; quelque soit $i = 1, 2, 3$ $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$

$$|a_{11}| = 4 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n |a_{1j}| = 2$$

$$|a_{22}| = 8 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n |a_{2j}| = 7$$

$$|a_{33}| = 9 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^n |a_{3j}| = 8.$$

2. La matrice de Jacobi $J = D^{-1}N$ où

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$J = D^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de Gauss-Seidel $G = M^{-1}N$ où

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 0 \\ 3 & -5 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$G = M^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{7}{144} & -\frac{5}{72} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} \\ 0 & \frac{7}{144} & \frac{57}{144} \end{pmatrix}$$

3. On regroupe les résultats dans le tableau qui suit

k	X_k	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (1, 0.8, 0.8)^T$.
1	$X_1 = (1.1, 0.875, 0.8889)^T$	$\ X_1 - X_0\ = 0.153 > \epsilon$
2	$X_2 = (1.059, 0.9556, 0.8972)^T$	$\ X_2 - X_1\ = 0.090 > \epsilon$
3	$X_3 = (1.0368, 0.9505, 0.9556)^T$	$\ X_3 - X_2\ = 0.062 > \epsilon$
4	$X_4 = (1.0235, 0.9815, 0.9602)^T$	$\ X_4 - X_3\ = 0.034 > \epsilon$
5	$X_5 = (1.0146, 0.9810, 0.9819)^T$	$\ X_5 - X_4\ = 0.023 > \epsilon$
6	$X_6 = (1.0093, 0.9923, 0.9848)^T$	$\ X_6 - X_5\ = 0.012 > \epsilon$
7	$X_7 = (1.0058, 0.9927, 0.9928)^T$	$\ X_7 - X_6\ = 0.0088 < 10^{-2} = \epsilon$

(Tableau 1.3)

Exercice 2

La matrice de Jacobi relative à la matrice A est

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice J_A sont solutions de l'équation

$$\det(J_A - \lambda I_D) = 0 \text{ donc } \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 = 0$$

Ce qui implique que $\rho(J_A) = \max\{|\lambda_i(J_A)|; i = 1, 2, 3\} = 0 < 1$. La méthode de Jacobi converge. La matrice de Gauss-Seidel relative à la matrice A est

$$G_A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice G_A sont solutions de l'équation

$$\det(G_A - \lambda I_D) = 0 \text{ donc } \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2 - \lambda) = 0$$

Ce qui implique que $\rho(G_A) = \max\{|\lambda_i(G_A)|; i = 1, 2, 3\} = 2 > 1$. La méthode de Gauss-Seidel diverge. De la même manière on obtient

$$\rho(J_B) = \max\{|\lambda_i(J_B)|; i = 1, 2, 3\} = 0 < 1.$$

Et

$$\rho(G_B) = \max\{|\lambda_i(G_B)|; i = 1, 2, 3\} = \frac{1}{2} < 1.$$

Les deux méthodes itératives convergent pour la matrice B .

Exercice 3 Considérons la matrice tri-diagonale suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est symétrique définie positive si et seulement si

a A une matrice symétrique $a_{ij} = a_{ji}$ pour $i, j = 1, 2, 3$ et $i \neq j$. Cette condition est vérifiée car $a_{12} = a_{21} = 3$; $a_{13} = a_{31} = 0$ et $a_{23} = a_{32} = -1$.

b Toutes les valeurs propre de la matrice A sont positives. On commence par calculer les valeurs propres de la matrice A , lesquelles sont solutions de

$$\det(A - \lambda I_D) = 0 \text{ donc } \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 & 0 \\ 3 & 4 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 6) = 0.$$

Les valeurs propres sont donc

$$\lambda_1 = 4 > 0; \lambda_2 = 4 + \sqrt{10} > 0; \lambda_3 = 4 - \sqrt{10} > 0.$$

La matrice A est S.D.P.

2. La matrice B_{GR} de la méthode du gradient associé à la résolution du système linéaire $Ax = b$ est définie par $B_{GR} = I_D - \alpha A$. La méthode de Gradient converge si

$$\alpha \in \left] 0, \frac{2}{\lambda_{\min}} \left[= \left] 0, \frac{2}{4 - \sqrt{10}} \left[$$

avec un choix optimal de

$$\alpha_{Optimal} = \frac{1}{4}.$$

a Les cinq premières itérations par les méthodes du gradient en partant de $X^{(0)} = (1, 1, 1)^T$. Sachant que la méthode de Gradient s'écrit

$$\begin{cases} X_0 = (1, 1, 1)^T \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = (I_D - \alpha A) X_k + \alpha D^{-1} b; k \geq 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

La matrice de la méthode du Gradient étant

$$G_{Gradient} = I_D - \alpha_{Optimal}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Et le vecteur

$$\alpha D^{-1}b = b = \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

On obtient le tableau qui suit

k	X_k	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (1, 1, 1)^T$.
1	$X_1 = \left(\frac{93}{4}, \frac{59}{2}, -\frac{95}{4}\right)^T$	$\ X_1 - X_0\ = 43.816378 > \epsilon$
2	$X_2 = \left(\frac{15}{8}, \frac{53}{8}, -\frac{133}{8}\right)^T$	$\ X_2 - X_1\ = 32.107972 > \epsilon$
3	$X_3 = \left(\frac{609}{32}, \frac{391}{16}, -\frac{715}{32}\right)^T$	$\ X_3 - X_2\ = 25.383580 > \epsilon$
4	$X_4 = \left(\frac{363}{64}, \frac{649}{64}, -\frac{1145}{64}\right)^T$	$\ X_4 - X_3\ = 20.067448 > \epsilon$
5	$X_5 = \left(\frac{4197}{256}, \frac{2723}{128}, -\frac{5495}{256}\right)^T$	$\ X_5 - X_4\ = 15.864737 > \epsilon$

3. La méthode de relaxation pour la résolution du système linéaire $Ax = b$ pour $w = 1.25$. La matrice de la méthode de relaxation est R_w

$$R_w = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = D - E - F$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_D; \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices M et N

$$M = \frac{1}{\omega}D - E = \frac{4}{1.24}I_D - E = \begin{pmatrix} 3.2 & 0 & 0 \\ 3 & 3.2 & 0 \\ 0 & -1 & 3.2 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F = -0.8I_D + F = \begin{pmatrix} -0.8 & -3 & 0 \\ 0 & -0.8 & 1 \\ 0 & 0 & -0.8 \end{pmatrix}$$

Donc

$$M^{-1} = \frac{1}{(3.2)^3} \begin{pmatrix} (3.2)^2 & 0 & 0 \\ -3(3.2) & (3.2)^2 & 0 \\ -3 & 3.2 & (3.2)^2 \end{pmatrix}$$

et

$$R_\omega = R_{1.25} = \frac{1}{(3.2)^3} \begin{pmatrix} -8.192 & -30.72 & 0 \\ 7.68 & 20.608 & (3.2)^2 \\ 2.4 & 6.44 & -4.992 \end{pmatrix}$$

4. Les cinq premières itérations par la méthode de relaxation. On calcule le vecteur

$$M^{-1}b = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} b = \frac{1}{(3.2)^3} \begin{pmatrix} 245.76 \\ 76.8 \\ -221.776 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = (1, 1, 1)^T \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = \frac{1}{(3.2)^3} \begin{pmatrix} -8.192 & -30.72 & 0 \\ 7.68 & 20.608 & (3.2)^2 \\ 2.4 & 6.44 & -4.992 \end{pmatrix} X_k + \frac{1}{(3.2)^3} \begin{pmatrix} 245.76 \\ 76.8 \\ -221.776 \end{pmatrix}; k \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.14)$$

On obtient les résultats suivants où les cinq premières itérations par les méthodes de relaxation sont calculées. En plus on donne les résultats avec la précision $\epsilon = 10^{-2}$ laquelle nécessite le calcul de sept itérations.

k	X_k	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (1, 1, 1)^T$.
1	$X_1 = (6.3125, 3.5195, -6.6501)^T$	$\ X_1 - X_0\ = 9.6485 > \epsilon$
2	$X_2 = (2.6223, 3.9585, -4.6004)^T$	$\ X_2 - X_1\ = 4.2440 > \epsilon$
3	$X_3 = (3.1333, 4.0102, -5.0969)^T$	$\ X_3 - X_2\ = 0.7143 > \epsilon$
4	$X_4 = (2.9571, 4.0073, -4.9734)^T$	$\ X_4 - X_3\ = 0.2151 > \epsilon$
5	$X_5 = (3.0038, 4.0028, -5.0057)^T$	$\ X_5 - X_4\ = 0.0569 > \epsilon$
6	$X_6 = (2.9964, 4.0008, -4.9983)^T$	$\ X_6 - X_5\ = 0.01065 > \epsilon$
7	$X_7 = (3.00015, 4.0001, -5.0003)^T$	$\ X_7 - X_6\ = 0.42 \times 10^{-2} < \epsilon = 10^{-2}$.

On fait remarquer que la solution exacte est

$$X = (3, 4, -5)^T.$$

Les cinq premières itérations par les méthodes de Gauss-Seidel

k	X_k	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (1, 1, 1)^T$.
1	$X_1 = (5.25, 3.8125, -5.0468)^T$	$\ X_1 - X_0\ = 7.9079 > \epsilon$
2	$X_2 = (3.1406, 3.8828, -5.0292)^T$	$\ X_2 - X_1\ = 2.1106 > \epsilon$
3	$X_3 = (3.0879, 3.9267, -5.0183)^T$	$\ X_3 - X_2\ = 0.0694 > \epsilon$
4	$X_4 = (3.0549, 3.9541, -5.0114)^T$	$\ X_4 - X_3\ = 0.0434 > \epsilon$
5	$X_5 = (3.0344, 3.9713, -5.0071)^T$	$\ X_5 - X_4\ = 0.0271 > \epsilon$

Exercice 4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est définie positive si toutes les valeurs propre de la matrice A sont positives. On commence par calculer les valeurs propres de la matrice A , lesquelles sont solutions de

$$\det(A - \lambda I_D) = 0 \text{ donc } \begin{vmatrix} 1 - \lambda & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 - \lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3 - 3\alpha^2(1 - \lambda) + 2\alpha^3 = 0.$$

Pour simplifier les calculs on pose

$$\beta = 1 - \lambda$$

Alors on doit résoudre l'équation du troisième ordre

$$\beta^3 - 3\alpha^2\beta + 2\alpha^3 = 0 \tag{1.15}$$

α étant solution de (1.15) cette dernière devient

$$\beta^3 - 3\alpha^2\beta + 2\alpha^3 = (\beta - \alpha)(\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha^2) = 0 \quad (1.16)$$

Les solutions de (1.16) sont

$$\beta_1 = \alpha \text{ et } \beta_2 = -2\alpha$$

Alors

$$\beta_1 = \alpha = 1 - \lambda_1 \text{ et } \beta_2 = -2\alpha = 1 - \lambda_2$$

Ainsi les valeurs propres de la matrice A sont

$$\lambda_1 = 1 - \alpha \text{ et } \lambda_2 = 1 + 2\alpha$$

Si A est définie positive alors

$$\lambda_1 = 1 - \alpha > 0 \text{ et } \lambda_2 = 1 + 2\alpha > 0$$

ce qui implique

$$\alpha < 1 \text{ et } \alpha > -\frac{1}{2}. \text{ Ainsi } \alpha \in \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[.$$

2. On sait que la méthode de relaxation converge si la matrice A du système est définie positive et le paramètre $\omega \in]0, 2[$. Ainsi pour $\alpha \in \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[$ la méthode de relaxation converge pour tout $\omega \in]0, 2[$.

3. Ecrire la matrice J de Jacobi correspondante est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Dont les valeurs propres sont solutions de

$$\det(J - \lambda I_D) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\lambda & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\alpha^2\lambda - 2\alpha^3 = -(\lambda - \alpha)^2(\lambda + 2\alpha) = 0$$

Alors

$$\lambda_1(J) = \alpha \text{ et } \lambda_2(J) = -2\alpha$$

La méthode de Jacobi converge si

$$\rho(J) = \max\{|\alpha|, 2|\alpha|\} = 2|\alpha| < 1$$

donc si

$$|\alpha| < \frac{1}{2} \text{ Ainsi } \alpha \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[.$$

Les valeurs de α pour lesquelles la méthode de Jacobi converge sont $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$.

4. La matrice G de Gauss-Seidel correspondante est

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha^2 & \alpha(\alpha - 1) \\ 0 & -\alpha^2(\alpha - 1) & \alpha^2(2 - \alpha) \end{pmatrix}$$

Dont les valeurs propres sont solutions de

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha^2 - \lambda & \alpha(\alpha - 1) \\ 0 & -\alpha^2(\alpha - 1) & \alpha^2(2 - \alpha) - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda) ((\alpha^2 - \lambda)(\alpha^2(2 - \alpha) - \lambda) + \alpha^3(\alpha - 1)^2) \\ &= (-\lambda) (\alpha^4(2 - \alpha) - \alpha^2\lambda - \alpha^2(2 - \alpha)\lambda + \lambda^2 + \alpha^3(\alpha - 1)^2) \\ &= (-\lambda) (\alpha^4(2 - \alpha) - \alpha^2(3 - \alpha)\lambda + \lambda^2 + \alpha^3(\alpha - 1)^2) \\ &= (-\lambda) (\lambda^2 - \alpha^2(3 - \alpha)\lambda + \alpha^3) \end{aligned}$$

Le discriminant Δ de $\lambda^2 - \alpha^2(3 - \alpha)\lambda + \alpha^3$ est

$$\Delta = \alpha^3(\alpha - 1)^2(\alpha - 4) > 0 \text{ ssi } \alpha \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[\quad (1.17)$$

$$\Delta = 0 \text{ ssi } \alpha = 0, \text{ ou } \alpha = 1, \text{ ou } \alpha = 4. \quad (1.18)$$

a Dans le cas de (1.17) les valeurs propres de la matrice G sont

$$\begin{aligned} \lambda_1(G) &= 0 \\ \lambda_2(G) &= \frac{\alpha^2(3 - \alpha) - \sqrt{\alpha^3(\alpha - 1)^2(\alpha - 4)}}{2} \\ \lambda_3(G) &= \frac{\alpha^2(3 - \alpha) + \sqrt{\alpha^3(\alpha - 1)^2(\alpha - 4)}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\rho(G) = \frac{\alpha^2(3 - \alpha) + (\alpha - 1)\sqrt{\alpha^3(\alpha - 4)}}{2}.$$

b Dans le cas de (1.18) les valeurs propres de la matrice G sont

Exercice 5 On considère le système nonlinéaire

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_2 e^{x_1} - 2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_2 + x_1^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \text{ où } X = (x_1, x_2)$$

La Jacobienne de f est

$$J_{f(X)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 e^{x_1} & e^{x_1} \\ 2x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Une itération de la méthode de Newton en partant de l'approximation initiale $(x_1^0, x_2^0) = (0, 1)$ revient à calculer X_1 où

$$\begin{cases} X_0 = (0, 1) \text{ le vecteur initial} \\ X_1 = X_0 - (J_f(X_0))^{-1} f(X_0) \end{cases} \quad (1.19)$$

$$J_{f(X_0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } (J_f(X_0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(X_0) = \begin{pmatrix} f_1(X_0) \\ f_2(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Alors la première itération

$$X_1 = X_0 - (J_f(X_0))^{-1} f(X_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. On ne peut pas prendre l'approximation initiale $(x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ car dans ce cas

$$J_{f(X_0)} = \begin{pmatrix} 2e & e \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas une matrice inversible.

Exercice 6 On veut résoudre le système non linéaire

$$\begin{cases} x_1^2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = 2 \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

lequel est équivalent à

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

1. On calcule 3 itérations de la méthode de Newton en partant du vecteur initial $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0.75, -0.75, 0.75)$. Donc on calcule X_1, X_2, X_3 . La Jacobienne de f est

$$J_{f(X)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(X) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(X) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 0 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ 2x_1 + x_2 & x_1 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

Alors

$$J_{f(X_0)} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & -1.5 & 0 \\ 0.75 & 0.75 & 1.5 \end{pmatrix} = (1.5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que

$$(J_{f(X_0)})^{-1} = -\frac{1}{1.5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur

$$f(X_0) = \begin{pmatrix} f_1(X_0) \\ f_2(X_0) \\ f_3(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4375 \\ -0.875 \\ -0.4375 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 - (J_{f(X_0)})^{-1} f(X_0) = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -0.75 \\ 0.75 \end{pmatrix} + \frac{1}{1.5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.4375 \\ -0.875 \\ -0.4375 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.0416 \\ -1.0416 \\ 1.0416 \end{pmatrix} = 1.3888X_0 \end{aligned}$$

Alors

$$J_{f(X_1)} = 1.3888 J_{f(X_0)}$$

donc

$$(J_{f(X_1)})^{-1} = \frac{1}{1.3888} (J_{f(X_0)})^{-1}.$$

Le vecteur

$$f(X_1) = \begin{pmatrix} f_1(X_1) \\ f_2(X_1) \\ f_3(X_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0849 \\ 0.1698 \\ 0.0849 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 - (J_f(X_1))^{-1} f(X_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1.0416 \\ -1.0416 \\ 1.0416 \end{pmatrix} + \frac{1}{2.0832} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0849 \\ 0.1698 \\ 0.0849 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.0008 \\ -1.0008 \\ 1.0008 \end{pmatrix} = 1.3344 X_0 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} X_3 &= X_2 - (J_f(X_2))^{-1} f(X_2) \\ &= \begin{pmatrix} 1.0008 \\ -1.0008 \\ 1.0008 \end{pmatrix} + \frac{1}{2.0016} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0016 \\ 0.0032 \\ 0.0016 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.0000 \\ -1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On regroupe tous les résultats dans le tableau qui suit

k	X_k	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (0.75, -0.75, 0.75)^T$.
1	$X_1 = (1.0416, -1.0416, 1.0416)^T$	$\ X_1 - X_0\ = 0.5 > \epsilon$
2	$X_2 = (1.0008, -1.0008, 1.0008)^T$	$\ X_2 - X_1\ = 0.0706 > \epsilon$
3	$X_3 = (10000, -10000, 10000)^T$	$\ X_3 - X_2\ = 0.00000192 < \epsilon = 10^{-5}$.

2. On ne peut pas démarrer l'algorithme si

$$J_{f(X_0)} = \begin{pmatrix} 2x_1^0 & 0 & 0 \\ 2x_1^0 & 2x_2^0 & 0 \\ 2x_1^0 + x_2^0 & x_1^0 & 2x_3^0 \end{pmatrix}$$

n'est pas une matrice inversible, donc si le $\det J_{f(X_0)} = 0$; Or

$$\det J_{f(X_0)} = 2^3 x_1^0 x_2^0 x_3^0 = 0$$

si et seulement si

$$x_1^0 = 0 \text{ ou } x_2^0 = 0 \text{ ou } x_3^0 = 0.$$

5 Intégration numérique

Le problème abordé dans cette section est celui du calcul approché d'une intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx. \quad (1.20)$$

Définition 1. Une méthode d'intégration numérique approchée est dite d'ordre p si $I_{\text{approchée}}(f) = I(f)$ pour tout polynôme d'ordre p et $I_{\text{approchée}}(f) \neq I(f)$ pour au moins un polynôme d'ordre $p + 1$.

On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles égaux

$$\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b \quad (1.21)$$

On note pour tout $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ h &= \frac{b - a}{n} \end{aligned}$$

5.1 La méthode des Trapèzes

L'intégrale (1.20) est approchée par la formule

$$I_T(f) = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right). \quad (1.22)$$

Avec l'erreur

$$E_T = |I(f) - I_T(f)| \leq M_2(f) \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

Où

$$M_2(f) = \max_{[a,b]} |f''(x)|. \quad (1.23)$$

Exemple 1.3. On applique la méthode des Trapèzes pour le calcul approché de

$$I(f) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \ln \sqrt{2} = 0.346573.$$

avec

$$h = \frac{\pi}{40}$$

et

$$x_{i+1} = x_i + h; \quad i = 0, \dots, 10.$$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{3\pi}{40}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{80}$	$\frac{3\pi}{20}$	$\frac{7\pi}{40}$	(1.24)
$f(x_i)$	0	0.078701	0.158384	0.240078	0.324919	0.414213	0.509525	0.612800	

x_i	$\frac{\pi}{50}$	$\frac{9\pi}{40}$	$\frac{\pi}{4}$
$f(x_i)$	0.726542	0.854080	1

(Tableau 1.3)

$$I_T(f) = 0.347086$$

Alors

$$E_T = 0.000513 = 0.0513 \times 10^{-2}.$$

5.2 La méthode de Simpson

L'intégrale (1.20) est approchée par la formule

$$I_S(f) = \frac{h}{3} (f(a) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2 + f(b)). \quad (1.25)$$

Où

$$\sigma_1 = f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})$$

et

$$\sigma_2 = f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_n)$$

Avec l'erreur

$$E_S = |I(f) - I_S(f)| \leq M_4(f) \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \quad (1.26)$$

Où

$$M_4(f) = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|. \quad (1.27)$$

Exemple 1.4 On reprend le meme exemple traité pour la méthode des Trapèzes on trouve

$$I_S(f) = 0.346576$$

avec

$$E_S = 0.3 \times 10^{-4}.$$

5.3 La méthode des rectangles

L'intégrale (1.20) est approchée par la formule

$$I_R(f) = h \left(\sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right). \quad (1.28)$$

Avec l'erreur

$$E_R = |I(f) - I_R(f)| \leq M_2(f) \frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

Où $M_2(f)$ est défini dans (1.23).

Exemple 1.5 On reprend le meme exemple traité pour la méthode des Trapèzes on trouve

$$I_S(f) = 0.395789$$

avec

$$E_S = 0.49216 \times 10^{-1}.$$

6 Série d'exercices 2

Université Badji-Mokhtar-Annaba
Département Électrotechniques
Master I

Année 2020-2021

Série 2 : Intégration Numérique

Exercice 1

1. Utiliser la méthode de Simpson et des Trapèzes pour $N = 6$ pour évaluer l'intégrale suivante

$$I = \int_1^9 \sqrt{x} dx$$

2. Utiliser la méthode de Simpson et des Trapèzes pour $N = 4$ pour évaluer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

Comparer les deux résultats avec la valeur exacte de l'intégrale.

Exercice 2 Soit l'intégrale suivante

$$I = \int_{1.8}^{3.4} e^x dx$$

En utilisant la méthode des trapèzes déterminer le nombre minimum d'intervalles qui assurent une approximation de I avec au moins trois chiffres significatifs.

Exercice 3 Utiliser la méthode des rectangles pour $N = 5$ pour évaluer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

Comparer le résultat avec la valeur exacte.

Exercice 4 On considère l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 x \ln(1+x) dx$$

Donner une valeur approchée de cette intégrale par la méthode des trapèzes puis par la méthode de Simpson pour $N = 10$. Comparer le résultat trouvé avec la valeur exacte.

$$I_S = \frac{9-1}{6(6)} (1 + 2(10.9639) + 3 + 4(13.0179)) = \frac{8}{36} (85.9994) = 17.3332$$

L'erreur

$$|I - I_S| = 0.0001 = 0.1 \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-3}.$$

(b) La méthode des Trapèzes

$$I_T = \frac{b-a}{2N} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(x_N) \right)$$

Alors

$$I_T = \frac{9-1}{2(6)} (1 + 2(10.9639) + 3) = 17.2852$$

L'erreur

$$|I - I_T| = 0.0481 = 0.482 \times 10^{-1} < 0.5 \times 10^{-1}.$$

2. Calcul de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

dont la valeur exacte est

$$I = \left. \frac{1}{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 0.4142.$$

Le tableau pour

$$h = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{4} = \frac{\pi}{16}$$

et

$$x_i = ih$$

	$x_0 = 0$	$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{\pi}{32}$	$x_1 = \frac{\pi}{16}$	$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3\frac{\pi}{32}$
$f(x_i)$	0	0,0990	0,2028	0,3170

$x_2 = \frac{\pi}{8}$	$\frac{x_2 + x_3}{2} = 5\frac{\pi}{32}$	$x_3 = 3\frac{\pi}{16}$	$\frac{x_3 + x_4}{2} = 7\frac{\pi}{32}$	$x_4 = \frac{\pi}{4}$
0,4483	0,6061	0,8036	1,0617	1,4142

(a) La méthode de Simpson

$$\sum_{i=1}^3 f(x_i) = 1.4547$$

$$\sum_{i=1}^4 f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) = 2.0838$$

$$I_S = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{4(6)} (0 + 2(1.4547) + 1,4142 + 4(2.0838)) = \frac{\pi}{96} () = 0.4143$$

L'erreur

$$|I - I_S| = 0.00005 = 0.5 \times 10^{-4} < 0.5 \times 10^{-3}.$$

(b) La méthode des Trapèzes

$$I_T = \frac{b-a}{2N} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(x_N) \right)$$

Alors

$$I_T = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{2(4)} (0 + 2(1.4547) + 1,4142) = 0.4244$$

L'erreur

$$|I - I_T| = 0.0120 = 0.120 \times 10^{-1} < 0.5 \times 10^{-1}.$$

La méthode de Simpson est plus précise que celle des Trapèzes.

Exercice 2 Calcul de

$$I = \int_{1.8}^{3.4} e^x dx$$

L'erreur de la méthode des Trapèzes est

$$|I_T| = \left| M_2(f) \frac{(b-a)^3}{12N^2} \right| < 0.5 \times 10^{-3}$$

Donc

$$N^2 > M_2(f) \frac{(b-a)^3}{12(0.5 \times 10^{-3})} \implies N > \sqrt{M_2(f) \frac{(b-a)^3}{12(0.5 \times 10^{-3})}}$$

$$\begin{aligned} M_2(f) &= e^{3.4} = 29.9641 \\ (b-a)^3 &= (3.4 - 1.8)^3 = 4.096 \end{aligned}$$

Alors

$$N > \sqrt{29.9641 \frac{4.096}{6 \times 10^{-3}}} = 143.022$$

Il suffit de prendre

$$N = 144$$

Exercice 3 Calcul de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

La méthode des rectangles est $N = 5$

$$I_R = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

Pour

$$h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{5} = \frac{\pi}{10}$$

donc

$$x_i = ih, \quad i = 0, \dots, 5$$

Le tableau est

$\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$	$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{h}{2} = \frac{\pi}{20}$	$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3\frac{h}{2} = 3\frac{\pi}{20}$
$f(x_i)$	0,9877	0,8910

$\frac{x_2 + x_3}{2} = 5\frac{h}{2} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{x_3 + x_4}{2} = 7\frac{h}{2} = 7\frac{\pi}{20}$	$\frac{x_4 + x_5}{2} = 9\frac{h}{2} = 9\frac{\pi}{20}$
0,7071	0,4540	0,1564

$$I_R = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{5} \sum_{i=1}^5 f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) = \frac{\pi}{10} (3.1962) = 1.0041$$

Ainsi

$$|I| = 0.0041 = 0.41 \times 10^{-2} < 0.5 \times 10^{-2}$$

Ainsi la valeur de $I_R = 1.0041$ est correcte avec 2 chiffres significatifs.

7 Résolution numérique des équations différentielles ordinaires

Soit $[t_0, t_0 + T] = [a, b]$ un intervalle fermé de \mathbb{R} , f une fonction continue de $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} et y_0 un élément de \mathbb{R} ; On cherche une fonction $y(t) \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R})$ qui vérifie

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ \forall t \in [t_0, t_0 + T] : y'(t) &= f(t, y(t)) \end{aligned} \tag{1.29}$$

Ce problème (1.29) est dit le problème de Cauchy pour l'équation différentielle du premier ordre

$$y'(t) = f(t, y(t)). \tag{1.30}$$

La condition

$$y(t_0) = y_0$$

est dite la condition de Cauchy.

7.1 La méthode d'Euler

Il n'est en général pas possible de calculer la solution exacte du problème de Cauchy (1.29). On doit alors utiliser des méthodes numériques. Dans cette sous-section nous étudions la plus simple des méthodes à savoir **la méthode d'Euler explicite (ou Euler progressive)**.

On se donne une subdivision de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$

$$\sigma : t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_N = t_0 + T \tag{1.31}$$

On note pour tout $i = 1, \dots, N$

$$t_{i+1} = t_i + h_i$$

Le pas

$$h = h(\sigma) = \max_{1 \leq i \leq N} h_i.$$

La méthode d'Euler explicite est alors définie par

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i, y_i); \quad i = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (1.32)$$

L'erreur de discrétisation est

$$E_i = |y(t_i) - y_i|; \quad i = 0, \dots, N-1$$

Exemple

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 = 1 \\ \forall t \in [0, T] : y'(t) &= y(t) = f(t, y(t)) \end{aligned} \quad (1.33)$$

1. Calculer la solution exacte de (1.33).
2. Calculer la solution approchée par la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{4}$ constant.

On commence par la solution exacte.

1. Evidemment

$$y' = y \text{ implique } \frac{dy}{dt} = y \text{ donc } \int \frac{dy}{y} = \int dt$$

Alors

$$\ln |y| = t + C \text{ et } y(t) = Ce^t$$

La condition $y(0) = y_0 = 1$ implique alors que la solution exacte est

$$y(t) = e^t.$$

2. On applique (1.32) pour un pas constant h , on obtient

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i, y_i) = y_i + h y_i = y_i (1 + h); \quad i = 0, \dots, N - 1$$

Ainsi

$$y_1 = y_0 (1 + h) = (1 + h) \approx y(t_1).$$

$$y_2 = y_1 (1 + h) = (1 + h)^2 \approx y(t_2).$$

...

$$y_{i+1} = y_i (1 + h) = (1 + h)^{i+1} \approx y(t_{i+1}).$$

Si on prend $h = \frac{1}{4}$ on obtient

$$y_1 = y_0 (1 + h) = (1 + h) = \frac{5}{4} = 1.25 \approx y(t_1) = e^{\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

$$y_2 = y_1 (1 + h) = (1 + h)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1.5625 \approx y(t_2) = e^{\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

$$y_3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \approx y(t_3) = e^{\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$y_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 \approx y(t_4) = e.$$

On calcule l'erreur

$$E_i = |y(t_i) - y_i| = \left| e^{t_i} - (1 + h)^i \right|; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

7.2 La méthode de Runge-Kutta

Cette méthode calcule la valeur approchée de la solution du problème de Cauchy aux point $t_i = t_0 + ih$ où h est le pas constant

$$h = \frac{T}{N}$$

et est définie par : Pour tout $i = 0, 1, 2, \dots, N$ on calcule

$$\begin{aligned} K_1^{(i)} &= hf(t_i, y_i) \\ K_2^{(i)} &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right) \\ K_3^{(i)} &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right) \\ K_4^{(i)} &= hf\left(t_i + h, y_i + K_3^{(i)}\right) \end{aligned}$$

et

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)} \right)$$

Exemple On reprend le même exemple traité dans le cadre de la méthode d'Euler. Ainsi pour

$$\begin{aligned} i &= 0 \\ K_1^{(0)} &= hf(t_0, y_0) = hy_0 = \frac{1}{4} \\ K_2^{(0)} &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{8}, 1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{8}, \frac{9}{8}\right) = \frac{9}{32} \\ K_3^{(0)} &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right) = hf\left(\frac{1}{8}, 1 + \frac{9}{64}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{8}, \frac{73}{64}\right) = \frac{73}{256} \\ K_4^{(0)} &= hf\left(t_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}\right) = hf\left(\frac{1}{4}, 1 + \frac{73}{256}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{8}, \frac{329}{256}\right) = \frac{329}{1024} \end{aligned}$$

et

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6} \left(K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)} \right) = 1.284016 \simeq y(t_1) = y\left(\frac{1}{4}\right) = e^{\left(\frac{1}{4}\right)} = 1.284025.$$

Pour

$$i = 1$$

$$K_1^{(1)} = hf(t_1, y_1) = hy_1 = 0.321004.$$

$$K_2^{(1)} = hf\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_1^{(1)}}{2}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{8}, 1.284016 + \frac{0.321004}{2}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{8}, 1.444518\right) = 0.361129.$$

$$K_3^{(1)} = hf\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_2^{(1)}}{2}\right) = hf\left(\frac{3}{8}, 1.284016 + \frac{0.361129}{2}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{8}, 1.464580\right) = 0.366145.$$

$$K_4^{(1)} = hf\left(t_1 + h, y_1 + K_3^{(1)}\right) = hf\left(\frac{1}{2}, 1.284016 + 0.366145\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}, 1.650161\right) = 0.412540.$$

et

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6} \left(K_1^{(1)} + 2K_2^{(1)} + 2K_3^{(1)} + K_4^{(1)} \right) = 1.648698 \simeq y(t_2) = y\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\left(\frac{1}{2}\right)} = 1.648721.$$

Pour

$$i = 2$$

$$K_1^{(2)} = hf(t_2, y_2) = hy_2 = 0.412174.$$

$$K_2^{(2)} = hf\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{K_1^{(2)}}{2}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{7}{8}, 1.854785\right) = 0.463696.$$

$$K_3^{(2)} = hf\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{K_2^{(2)}}{2}\right) = 0.470136.$$

$$K_4^{(2)} = hf\left(t_2 + h, y_2 + K_3^{(2)}\right) = 0.529708.$$

et

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6} \left(K_1^{(2)} + 2K_2^{(2)} + 2K_3^{(2)} + K_4^{(2)} \right) = 2.116955 \simeq y(t_3) = y\left(\frac{3}{4}\right) = e^{\left(\frac{3}{4}\right)} = 2.117000.$$

Pour

$$i = 3$$

$$K_1^{(3)} = hf(t_3, y_3) = hy_3 = 0.529238.$$

$$K_2^{(3)} = hf\left(t_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{K_1^{(3)}}{2}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{7}{8}, 1.854785\right) = 0.595393.$$

$$K_3^{(3)} = hf\left(t_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{K_2^{(3)}}{2}\right) = 0.603662.$$

$$K_4^{(3)} = hf\left(t_3 + h, y_3 + K_3^{(3)}\right) = 0.680154.$$

et

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{6} \left(K_1^{(3)} + 2K_2^{(3)} + 2K_3^{(3)} + K_4^{(3)} \right) = 2.718205 \simeq y(t_4) = y(1) = e = 2.718281.$$

8 Série d'exercices 3

Université Badji-Mokhtar-Annaba

Année 2020-2021

Département Électrotechniques

Master I

Série 3 : Méthodes numériques pour les EDO du premier ordre

Exercice 1

8. Série d'exercices 3

1. Utiliser la méthode d'Euler en prenant $h = 0.1$ pour résoudre le problème

$$\begin{cases} y' + 2y = x^3 e^{-2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

aux points 0.1; 0.2; 0.3.

2. Reprendre la même question pour les deux pas $h = 0.05$ et $h = 0.025$.

3. Comparer les résultats avec la solution exacte $y(x) = \frac{e^{-2x}}{4} (x^4 + 4)$.

Exercice 2 Reprendre les mêmes questions de l'exercice 1 pour les problèmes suivants

1.

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 + xy - x^2}{x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

La solution exacte est $y(x) = e^{4x} + e^{-3x}$.

2.

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^3} + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Aux points $x_1 = 1.1$; $x_2 = 1.2$; $x_3 = 1.3$. La solution exacte est $y(x) = \frac{1}{3x^2} (9 \ln x + x^3 + 2)$.

Exercice 3 Appliquer la méthode de Runge-Kutta

Pour $i = 0, 1, 2, \dots$

y_i étant connu, calculer

$$\begin{cases} k_{1i} = f(x_i, y_i) \\ k_{2i} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_{1i}\right) \\ k_{3i} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_{2i}\right) \\ k_{4i} = f(x_i + h, y_i + hk_{3i}) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}) \end{cases}$$

pour les problèmes des exercices 1 et 2.

8.1 Corrigé série 3