

## **Chapitre 2 : Mécanique de la Rupture Linéaire et Elastique (LEFM) (4 semaines)**

### **Types de rupture**

1. Rupture par fissuration rapide: ductile, semi-fragile, fragile
2. Rupture par fissuration progressive:
  - a) En cas de sollicitations statiques : corrosion sous contrainte, fluage, ...
  - b) En cas de sollicitations cycliques : fatigue mécanique, fatigue thermique
  - c) Lors de sollicitations complexes : fatigue-corrosion, fatigue-fluage, ...

### **Rupture fragile**

*Mécanisme*: Se produit au niveau des liaisons atomiques internes sans entraîner de déformation plastique à l'échelle macroscopique.

*Conditions*: Survient lorsque l'énergie locale de déformation causée par des contraintes externes atteint le seuil requis pour la dissociation des liaisons atomiques.

*Caractéristiques*: La fissure se propage très rapidement.

- Nécessite une quantité d'énergie minimale.
- Les imperfections et les irrégularités géométriques jouent un rôle fondamental dans l'amorçage de la rupture.



Faciès de rupture d'une éprouvette de Charpy rompue à -70 °C.

### **Rupture ductile**

Dans ce cas, le matériau subit une plasticité progressive, et une fissure stable peut éventuellement se développer à l'intérieur de la matière. L'endommagement peut se propager de manière diffuse et relativement importante. Les métaux à structure cubique à faces centrées présentent ce comportement, tandis que les métaux de type cubique centré restent ductiles à des températures suffisamment élevées. La rupture ductile se déroule en trois phases distinctes :

- a) L'amorçage de cavités autour d'inclusions.
- b) La croissance de ces cavités.
- c) La coalescence des cavités, conduisant à l'apparition d'une fissure macroscopique.

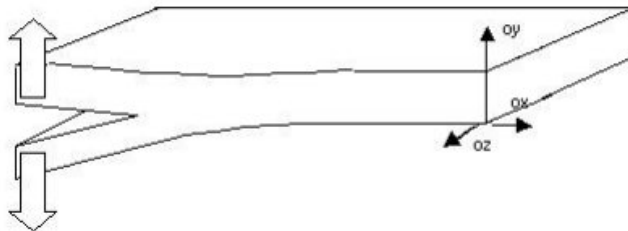
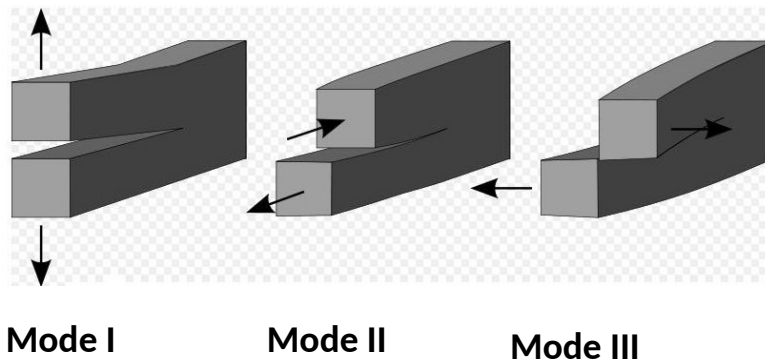


**Rupture d'aluminium pur**

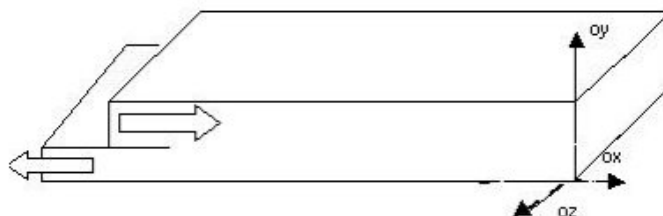
Type de rupture	Déformation associée	Caractéristiques
Rupture fragile	Faible déformation	Peu ou pas de déformation plastique, rupture brutale, souvent à basse température.
Rupture ductile	Grande déformation	Déformation plastique importante avant rupture, absorption d'énergie.
Rupture mixte	Moyenne déformation	Comportement intermédiaire, fréquent dans les matériaux métalliques.

### Modes de rupture

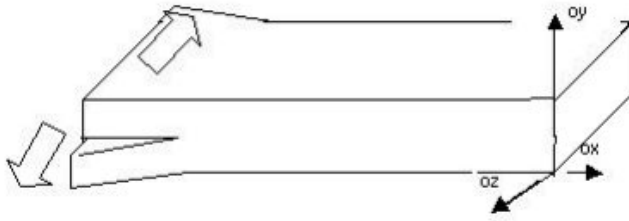
Trois modes de rupture principaux sont considérés



**Mode I** : (ouverture) Un déplacement uniquement suivant  $oy$  correspond à un problème plan particulier désigné par le mode I. Il correspond à une propagation en traction pure. Ce mode est, le plus souvent, le plus dangereux.



**Mode II** : (glissement dans le plan) Il est engendré par un cisaillement dans le plan de la fissure et parallèle à l'axe  $ox$ . Le mode II correspond à une propagation en cisaillement dans le plan.

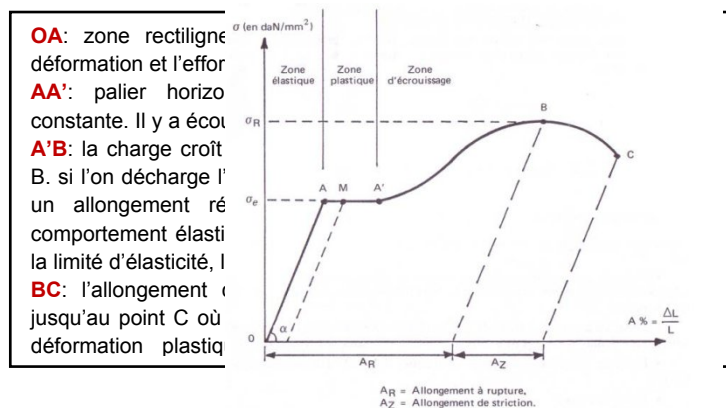


**Mode III** : Il est produit par un cisaillement antiplan, situé dans le plan de la fissure  $oxz$  et parallèle à l'axe  $oz$ . Il correspond à une propagation en cisaillement.

Les premières expérimentations sur la rupture ont été menées bien avant la révolution industrielle par **Léonard de Vinci** (1452-1519). Il a démontré que la résistance à la traction d'un fil de fer diminuait à mesure que la longueur du fil augmentait. Ce résultat suggérait déjà que la présence de défauts dans le matériau influençait sa résistance : plus le volume du matériau est important (comme dans le cas d'un fil de fer long), plus la probabilité de présence de fissures est élevée. Cette interprétation qualitative a été précisée ultérieurement en **1920 par Griffith**, qui a établi une relation directe entre la taille des défauts et la contrainte de rupture.

### Utilisation de la mécanique de la rupture pour la conception des structures

**La première conception**, plus traditionnelle, repose sur la limite d'élasticité du matériau, symbolisée par  $\sigma_e$ . les structures sont dimensionnées de manière à maintenir les contraintes appliquées ( $\sigma$ ) en dessous de la limite d'élasticité ( $\sigma < \sigma_e$ ).



Pour prévenir tout risque de rupture fragile, il est courant d'introduire un coefficient de sécurité ( $\sigma < \alpha \sigma_e$  avec  $\alpha < 1$ ). Cette approche, entièrement définie par les variables  $\sigma$

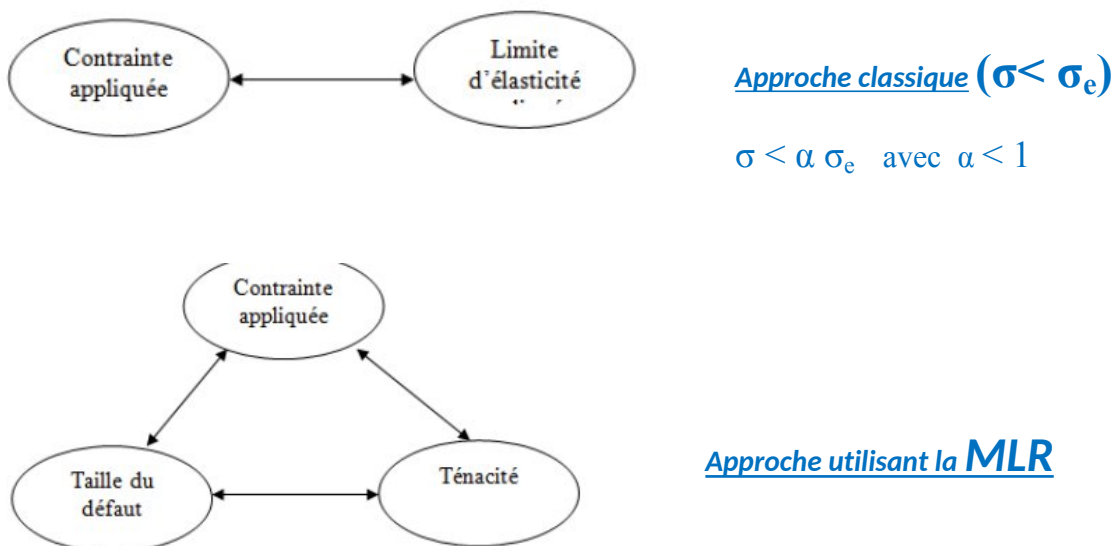
et  $\sigma_e$ , ne prend pas en compte la présence éventuelle de défauts, tels que des microfissures.

**la seconde conception**, s'appuie sur le concept de ténacité  $K_C$ , issu de la mécanique linéaire de la rupture (MLR).

L'approche basée sur la mécanique linéaire de la rupture implique trois variables:

1. La contrainte appliquée ( $\sigma$ ),
2. la ténacité  $K_C$  (qui remplace la limite d'élasticité),
3. et une nouvelle variable liée à la taille du défaut.

Dans cette conception, on vérifie que la force appliquée ne génère pas un facteur  $K$  supérieur à  $K_C$  même en présence de défauts. Cela permet de prédire la rupture plus précisément qu'en ne tenant compte que de la résistance à la traction.



## 2.1 Théorie énergétique Griffith (G)

Jusqu'au début du vingtième siècle il était considéré que la résistance à la rupture des matériaux dépendait de valeurs extrêmes de certaines composantes de la contrainte. On parlait ainsi de résistance en traction ou de résistance en compression.

En 1920 pendant la Première Guerre mondiale, le travail de Griffith [1] (ingénieur aéronautique anglais) sur le développement de la rupture dans les matériaux

métalliques, a montré que dans tous les matériaux, y compris les verres, il existe des défauts plus ou moins petits qui impliquent des concentrations locales de

contrainte. Ainsi les valeurs moyennes de contrainte, calculées en tout point d'un matériau en supposant que le matériau est homogène (sans défauts) et au repos (vitesse nulle en tout point), ne permettent pas d'évaluer les conditions de chargement qui engendrent la rupture de ce matériau. **On doit s'intéresser à la croissance des défauts et plus particulièrement aux concentrations de contrainte qui leur sont associées.**

Aujourd'hui l'étude d'un phénomène de rupture doit répondre à trois questions:

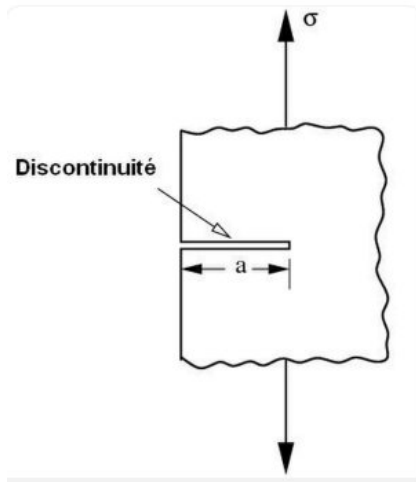
- Quelles sont les conditions de chargement qui entraînent la propagation de défauts ?
- Quelle est la géométrie des surfaces engendrées par la propagation de ces défauts ?
- Le processus de rupture est-il stable ou instable ? La propagation est stable lorsque la croissance des défauts s'arrête spontanément si les charges appliquées sont maintenues constantes

La mécanique de la rupture a été inventée par **Griffith**, pour expliquer la **rupture des matériaux fragiles**. Son travail a été motivé par deux faits contradictoires:

- La contrainte nécessaire pour rompre un verre courant est d'environ 100 MPa, et
- La contrainte théorique nécessaire à la rupture de liaisons atomiques est d'environ 10 000 MPa

Griffith suggère que la faiblesse de la résistance à la rupture observée dans ses expériences, ainsi que la dépendance de l'intensité de cette résistance, étaient due à la présence de défauts microscopiques préexistant dans le matériau courant.

Pour vérifier l'hypothèse de défauts préexistants, Griffith a introduit une discontinuité artificielle dans ses échantillons expérimentaux. La discontinuité artificielle était une forme de fissure débouchante plus importante que les autres discontinuités supposées préexistantes dans l'échantillon.



Fissure débouchante dans une éprouvette chargée en mode I.

Les expériences ont montré que le produit de la racine carrée de la longueur de défauts ( $a$ ) et la contrainte à la rupture ( $\sigma$ ) était à peu près constant, ce qui est exprimé par l'équation:  $\sigma\sqrt{a} \sim C$

#### Critère de Griffith : calcul simplifié

Si l'on suppose la présence d'une fissure de taille  $a$  dans un matériau sous traction (contrainte  $\sigma$ ), le calcul de la valeur  $\sigma$  de la contrainte à partir de laquelle cette fissure grandit peut s'estimer simplement.

L'explication de cette relation en termes de théorie de l'élasticité linéaire pose un problème de point singulier. En élasticité linéaire, la théorie prédit que la contrainte (et par conséquent l'effort) à l'extrémité d'une fissure dans un matériau idéalement élastique est infinie. Pour éviter ce problème, **Griffith a développé une approche thermodynamique pour expliquer la relation qu'il a observée.**

Le développement d'une fissure nécessite la création de deux nouvelles surfaces et donc une augmentation de l'énergie de surface. Griffith a trouvé une expression pour la constante  $C$  sur le plan de l'énergie de surface de la fissure en résolvant le problème de l'élasticité d'une fissure finie dans une plaque élastique. En bref, l'approche était la suivante:

- Calculer l'énergie potentielle stockée dans un échantillon parfait sous une charge de traction uniaxiale,

- Ajuster la contrainte de sorte que la charge appliquée ne déforme pas l'échantillon, puis introduction d'une fissure dans l'éprouvette. La fissure relaxe la contrainte et, par voie de conséquence, relaxe l'énergie élastique aux abords des faces de la fissure. D'autre part, de par son existence, la fissure augmente l'énergie de surface totale de l'échantillon.
- Calculer la différence d'énergie libre (énergie de surface - énergie élastique) en fonction de la longueur de la fissure. **La rupture se produit lorsque l'énergie libre atteint une valeur maximale pour une longueur critique de fissure, au-delà de laquelle l'énergie libre diminue du fait de la propagation de la fissure** (augmentation de l'énergie de surface) c'est-à-dire de l'augmentation de la longueur de la fissure jusqu'à provoquer la rupture.

Dans un matériau (figure...), une extension  $\Delta a$  d'une fissure de longueur  $a$  s'accompagne des variations d'énergie suivantes :

$$\Delta W_{\text{ext}} = \Delta W_{\text{élast}} + \Delta U$$

Avec  $\Delta W_{\text{ext}}$ : Variation d'énergie appliquée (due aux forces extérieures),

$\Delta W_{\text{élast}}$ : Variation d'énergie élastique (emmagasinée),

$\Delta U$ : Energie dépensée lors de la propagation de la fissure sur la longueur  $\Delta a$ .

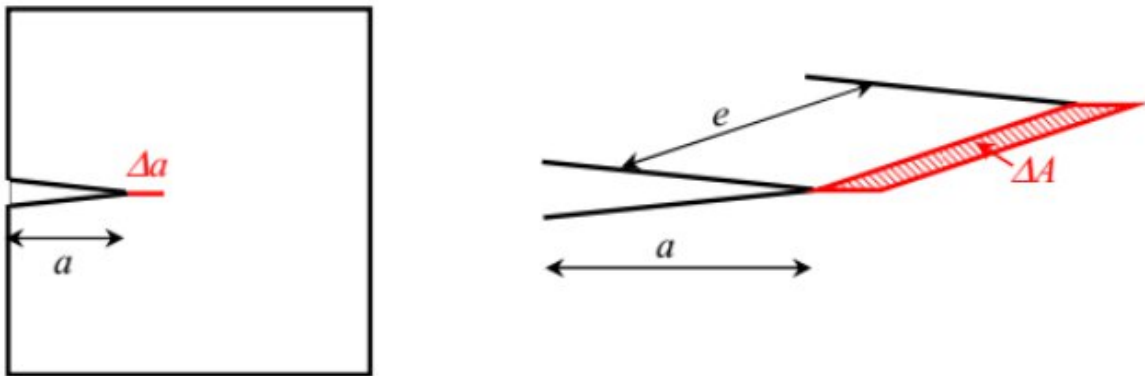


Figure ... : Propagation de la fissure sur une longueur  $\Delta a$ .

La théorie initiale de Griffith est une théorie qui s'applique principalement à la rupture fragile des matériaux. Elle considère que la rupture se produit en raison de la propagation de fissures ou de défauts préexistants dans le matériau. L'énergie de rupture, notée  $\Delta U$ , dans cette théorie correspond à l'énergie nécessaire pour créer de nouvelles surfaces dans le matériau, c'est-à-dire pour ouvrir et étendre une fissure. Plus précisément,  $\Delta U$  est égale à l'énergie de séparation des surfaces, notée  $\Delta W_{\text{sép}}$ . L'énergie de séparation des surfaces est l'énergie nécessaire pour séparer les deux surfaces d'une fissure et créer ainsi de nouvelles surfaces. C'est un concept clé dans la compréhension de la rupture fragile des matériaux.

Lorsque l'on souhaite exprimer cette énergie par unité de surface, on introduit la notion d'énergie de Griffith, notée  $G$ . L'énergie de Griffith est définie comme la



Composé par A. Khettache, département de métallurgie.

quantité  $\Delta U$  rapportée à l'unité de surface. En d'autres termes,  $G$  est l'énergie de rupture par unité de surface:

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{e \Delta A} = \frac{\partial U}{\partial A}$$

Où  $\Delta A = e \Delta a$  est la surface fissurée lors de la propagation de la fissure sur la longueur  $\Delta a$  dans une éprouvette d'épaisseur  $e$ . Généralement, on suppose l'épaisseur unité ( $e = 1$ ) si bien que l'expression de l'énergie  $G$  rapporté à l'unité d'épaisseur devient :

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta A} = \frac{\partial U}{\partial A}$$

Si on considère à présent  $\gamma_s$  l'énergie spécifique de création de surface, la formule précédente devient :

$$G = \frac{\partial U}{\partial A} = 2\gamma_s$$

Comme d'après la relation  $G = \pi (\sigma_R)^2 a / E$ , la contrainte à rupture  $\sigma_R$  est donnée par :

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}$$

Un matériau contenant une fissure peut rompre sous une force bien inférieure à la force théorique de rupture du matériau parfait. La contrainte critique est la contrainte (**force par unité de surface**) à partir de laquelle la fissure se propage brutalement.

Selon donc, le critère de Griffith pour les matériaux fragiles, pour un matériau élastique avec une fissure de longueur ( $a$ ), la force nécessaire pour initier la rupture est liée à :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}}$$

- $\sigma_c$  : contrainte critique
- $E$  : module d'Young
- $\gamma$  : énergie de surface (énergie pour créer une nouvelle surface)
- $a$  : demi-longueur de la fissure

Plus la fissure est longue, plus la force nécessaire pour provoquer la rupture est faible

## 2.2 Modification d'Irwin

A la fin des années cinquante, le métallurgiste Irwin [2] a proposé de considérer la propagation de n'importe quel défaut comme la superposition de trois modes fondamentaux de rupture (figure 1) :

- Le mode I correspond à une propagation en traction pure ;
- Le mode II correspond à une propagation en cisaillement dans le plan de la figure ;
- Le mode III correspond à une propagation en cisaillement perpendiculairement au plan de la figure. Ces modes fondamentaux ont été introduits car ils permettent un calcul analytique des concentrations de contrainte qui leurs sont associées.

L'œuvre de Griffith a été largement ignorée par la communauté des ingénieurs jusqu'au début des années 1950. Les raisons semblent être que, pour les matériaux employés dans la réalisation des structures, le niveau réel d'énergie nécessaire pour causer la rupture est de plusieurs ordres de grandeur supérieur à l'énergie de surface correspondante et que, dans les matériaux de construction il y a toujours des déformations élastiques en fond de fissure ce qui rend l'hypothèse du milieu élastique linéaire avec contraintes infinie en pointe de la fissure tout à fait irréaliste.

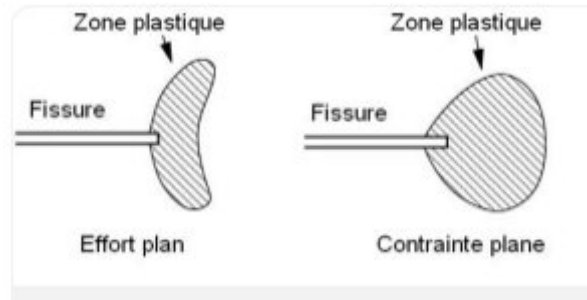
La théorie de Griffith concorde parfaitement avec les données expérimentales sur des matériaux fragiles tels que le verre.

Pour des matériaux ductiles tels que l'acier, bien que la relation  $\sigma\sqrt{a} \sim C$  soit toujours valable, l'énergie de surface ( $\gamma$ ) prédite par Griffith, la théorie est souvent irréaliste. Un groupe de travail dirigé par G. R. Irwin à l'US Naval Research Laboratory (NRL), constitué durant la Seconde Guerre mondiale, a réalisé que la plasticité doit jouer un rôle important dans la rupture des matériaux ductiles.

Dans les matériaux ductiles (et même dans des matériaux qui semblent être fragiles), une zone plastique se développe en front de fissure. L'augmentation de la dimension de la zone plastique est

Composé par A. Khettache, département de métallurgie.

fonction de l'augmentation de la charge jusqu'à ce que la fissure se propage libérant les contraintes en arrière du fond de fissure. Le cycle de chargement/libération de chargement plastique aux abords du front de fissure conduit à la dissipation d'énergie comme le ferait un traitement thermique de relaxation de contrainte. Par conséquent, un terme dissipatif doit être ajoutée à la relation de l'équilibre énergétique tel qu'élaboré par Griffith pour les matériaux cassants. En termes physiques, de l'énergie supplémentaire est nécessaire pour que la propagation des fissures se produise dans les matériaux ductiles si on les compare aux matériaux fragiles.



Zone plastique aux abords du front de fissure dans un matériau ductile.

### 2.3 Etalonnage de la conformité

La stratégie d'Irwin était de partitionner l'énergie :

- L'énergie stockée en déformation élastique (effet ressort) qui se libère lors de la propagation d'une fissure. Telle est la force motrice thermodynamique de rupture.
- L'énergie dissipée qui comprend la dissipation plastique et l'énergie de surface (et toutes les autres forces dissipatives qui peuvent être au travail). L'énergie thermodynamique dissipée fournit une résistance à la rupture. L'énergie totale dissipée est donnée par :

$$(3) \quad G = 2\gamma + G_p$$

où  $\gamma$  est l'énergie de surface et  $G_p$  est la dissipation plastique (ainsi que la dissipation provenant d'autres sources) par unité de surface de la fissure.

La version modifiée du critère énergétique de Griffith peut alors être écrite comme :

$$(4) \quad \sigma_f = \sqrt{\frac{E G}{\pi a}}.$$

- Pour un matériau fragile comme le verre par exemple, le terme d'énergie de surface domine et

$$G \approx 2\gamma = 2 \text{ J/m}^2.$$

Composé par A. Khettache, département de métallurgie.

- Pour un matériau ductile comme l'acier par exemple, le terme de dissipation plastique domine et

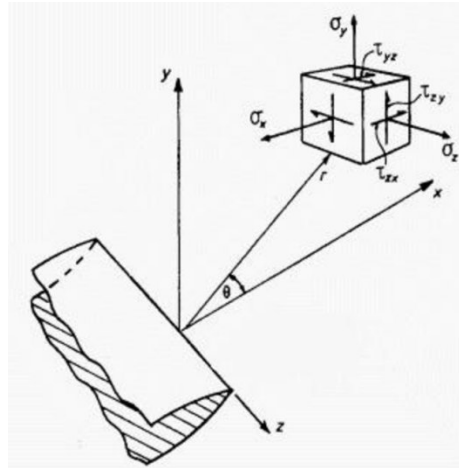
$$G \approx G_p = 1000 \text{ J/m}^2 .$$

- Pour les plastiques polymères proche de la température de transition de phase de vitrification , nous avons une valeur intermédiaire de

$$G \approx 2 - 1000 \text{ J/m}^2 .$$

## 2.4 Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC)

Une autre réalisation importante du groupe de travail a été de trouver une méthode de calcul de la quantité d'énergie disponible pour une fracture au niveau de la contrainte asymptotique et les champs de déplacement autour d'un front de fissure dans un solide idéalement élastique, **dans le cas d'un chargement en mode I.**



$$\sigma_{xy} \approx \left( \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{xy}(\theta)$$

avec « r » représentant la distance au front de fissure

$$\sigma_x \approx \left( \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_y \approx \left( \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\tau_{xy} \approx \left( \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \right) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

En déformation plane :

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

En contrainte plane

$$\sigma_z = 0$$

$K_I$  est le seul paramètre fournissant une caractéristique du champ de contrainte existant aux abords du fond de fissure. C'est le facteur d'intensité de contrainte (en déformation plane). La valeur de  $K_I$  peut être calculée en analyse de contrainte en fond de fissure (à la pointe de la fissure). Des expressions de  $K_I$  ont été déterminées pour un grand nombre de cas de chargement et de configuration de pièces. Toutes les expressions sont de la forme :

$$K_I = \alpha \sigma \sqrt{\pi a} \text{ en MPa } \sqrt{m}$$

$\alpha$  facteur tenant compte de la géométrie de la fissure et de la répartition des contraintes.

$\sigma$  contraintes dans le matériau normales au plan de fissure et en l'absence de celle-ci.

Au niveau de chargement produisant l'initiation d'une fissure correspond une valeur particulière de  $K_I$ . Cette valeur particulière de  $K_I$  est désigné par le symbole  $K_{Ic}$  et c'est une propriété du matériau au même titre que la limite d'élasticité. Ces deux propriétés varient avec la température, la vitesse de chargement et la structure métallurgique.

**$K_{Ic}$  caractérise la résistance du matériau à la propagation de fissures.**