II- REPRESENTATION DES NOMBRES ENTIERS

II.1 Représentation d'un entier naturel

Un entier naturel est un nombre entier positif ou nul. Le choix à faire (c'est-à-dire le nombre de bits à utiliser) dépend de l'intervalle des nombres que l'on désire utiliser. Pour coder des nombres entiers naturels compris entre 0 et 255, il nous suffira de 8 bits (un octet) car 2^8=256. D'une manière générale un codage sur n bits pourra permettre de représenter des nombres entiers naturels compris entre 0 et 2^{n-1}.

Exemples : $9 = (00000101)_2$, $128 = (10000000)_2$

II.2 Représentation d'un entier relatif

Un entier relatif est un entier pouvant être négatif. Il faut donc coder le nombre de telle façon que l'on puisse savoir s'il s'agit d'un nombre positif ou d'un nombre négatif.

- **Problème :** Comment indiquer à la machine qu'un nombre est négatif ou positif ????

Il existe 3 méthodes pour représenter les nombres négatifs :

II.2.1 Signe et valeur absolue (S/VA)

Si on travaille sur n bits , alors le bit du poids fort est utilisé pour indiquer le signe (1 : signe négatif, 0 : signe positif) et les autres bits (n -1) désignent la valeur absolue du nombre.

- **Exemple** : Si on travaille sur 4bits

  $(-5)_{10} = (1\ 101)_2$; $(+5)_{10} = (0101)_2$

Signe	VA	Valeurs
0	**00**	**+ 0**
0	01	+1
0	10	+2
0	11	+3
1	**00**	**-0**
1	01	-1
1	10	-2
1	11	-3

Sur n bits, l'intervalle de valeurs qu'on peut représenter en S/VA :

$$-(2^{(n-1)} - 1) \leq N \leq +(2^{(n-1)}-1)$$

Essayons de calculer 2 + (-2) = 0

Binaire					Décimal	
	0	0	1	0		2
+	1	0	1	0	+	−2
=	1	1	0	0	=	−4

Ce n'est pas ce que nous voulions :-4 au lieu de 0 !!

Avantages : C'est une représentation assez simple.

Inconvénient : le zéro possède deux représentations +0 et -0

II.2.2 Le complément à un

On appelle complément à un (c.à.1) d'un nombre N un autre nombre N' tel que : $N+N'=2^n-1$

n : est le nombre de bits de la représentation du nombre N .

Exemple :

Soit N=1010 sur 4 bits donc son complément à un de N : $N'= (2^4 - 1)$

$N'=(16-1)-(1010)_2= (15)_{10} - (1010)_2 = (1111)_2 – (1010)_2 = 0101$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0 \\ +\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

Pour trouver le complément à un d'un nombre, il suffit d'inverser tous les bits de ce nombre :

Si le bit est un 0 mettre à sa place un 1 et si c'est un 1 mettre à sa place un 0 .

Exemples

$(10010011) = (01101100)_{c.à.1}$

$(11001100) = (00110011)_{c.à.1}$

En Complément à un, le bit du poids fort nous indique le signe (0 : positif , 1 : négatif). Le complément à un du complément à un d'un nombre est égale au nombre lui même.

CA1(CA1(N))= N

Exemple :

Quelle est la valeur décimale représentée par la valeur 101010 en complément à 1 sur 6 bits ?

- Le bit poids fort indique qu'il s'agit d'un nombre négatif.
- Valeur = - CA1(101010)

$= - (010101)_2 = - (21)_{10}$

Si on travaille sur 3 bits

CA1	Binaire	Décimal
000	000	**+ 0**
001	001	+ 1
010	010	+ 2
011	011	+ 3
100	- 011	- 3
101	- 010	- 2
110	- 001	- 1
111	- 000	**- 0**

Inconvénient : Dans cette représentation le zéro possède une double représentation.

Si on travaille sur n bits, l'intervalle des valeurs qu'on peut représenter en CA1 :

$$-(2^{(n-1)} - 1) \leq N \leq +(2^{(n-1)} - 1)$$

II.2.3 Le complément à deux

Les nombres positifs sont codés de la même manière qu'en binaire pure alors qu'un nombre négatif est codé en ajoutant la valeur 1 à son complément à 1. Le bit le plus significatif est utilisé pour représenter le signe du nombre.

La représentation en complément à deux est la représentation la plus utilisée pour la représentation des nombres négatifs dans la machine.

Le complément à deux du complément à deux d'un nombre est égal au nombre lui-même.

CA2(CA2(N))= N

CA2	binaire	valeur
000	000	**+ 0**
001	001	+ 1
010	010	+ 2
011	011	+ 3
100	- 100	- 4
101	- 011	- 3
110	- 010	- 2
111	- 001	- 1

Avantage : On remarque que le zéro n'a pas une double représentation

Si on travaille sur n bits, l'intervalle des valeurs qu'on peut représenter en CA2 :

$$-(2^{(n-1)}) \leq N \leq +(2^{(n-1)} - 1)$$

Exemple

On désire coder la valeur −19 sur 8 bits. Il suffit :

1. d'écrire 19 en binaire : 00010011
2. d'écrire son complément à 1 : 11101100
3. et d'ajouter 1 : 11101101

La représentation binaire de −19 sur 8 bits est donc 11101101.

- **Opérations arithmétique en complément à deux (Sur 5 bits)**

$$\begin{array}{rr} +9 & 01001 \\ \underline{+4} & \underline{00100} \\ +13 & \mathbf{0}1101 \end{array}$$

le bit de signe = 0 ➔ le nombre est positif)

$(01101)_2 = (13)_{10}$

$$\begin{array}{rr} +9 & 01001 \\ \underline{-4} & \underline{11100} \\ +5 & 100101 \end{array}$$

On remarque que le résultat est sur 6 alors qu'on travaille sur 5 bits dans ce cas on ignore le sixième bit (appelé report) de ce fait le résultat de l'addition sera 00101(Résultat positif)

$(00101)_2 = (5)_{10}$

$$\begin{array}{rr} -9 & 10111 \\ \underline{-4} & \underline{11100} \\ -13 & 110011 \end{array}$$

On ignore le report le résultat est 110011 (nombre négatif)

Résultat = - CA2 (10011)= -(01101)

= - 13

$$\begin{array}{rr} -9 & 10111 \\ \underline{+9} & \underline{01001} \\ 0 & 100000 \end{array}$$

Le résultat est positif

$(00000)_2 = (0)_{10}$

La retenue et le débordement

- ✓ On dit qu'il y a une retenue si une opération arithmétique génère un report.
- ✓ On dit qu'il ya un débordement (Over Flow) si le résultatde l'opération sur n bits **et** faux.
- ✓ Le nombre de bits utilisés est insuffisant pour contenir le résultat, autrement dit le résultat dépasse l'intervalle des valeurs sur les n bits utilisés.

- **Cas de débordement**

$$\begin{array}{rr} +9 & 01001 \\ \underline{+8} & \underline{01000} \\ +17 & 10001 \end{array}$$

Le résultat est négatif alors qu'il doit être positif ➔ Débordement !!!

$$\begin{array}{rr} -9 & 10111 \\ \underline{-8} & \underline{11000} \\ -17 & 01011 \end{array}$$

Le résultat est positif alors qu'il doit être négatif ➔ Débordement !!!

Nous avons un débordement si la somme de deux nombres positifs donne un nombre négatif, ou la somme de deux nombres négatifs donne un Nombre positif

Il n'y a jamais un débordement si les deux nombres sont de signes différents.

III. LA REPRESENTATION DES NOMBRES REELS

Un nombre réel est constitué de deux parties : la partie entière et la partie fractionnelle (les deux parties sont séparées par une virgule)

Problème : comment indiquer à la machine la position de la virgule ?

Il existe deux méthodes pour représenter les nombre réel :

III.1 Nombres à virgule fixe

Possède une partie 'entière' et une partie 'décimale' séparés par une virgule, utilisé parles premières machines. La position de la virgule est fixe d'où le nom.

Exemple : $(11.01)_2$, $(75.23)_8$, $(E7,A4)_{16}$

III.2 Nombres à virgule flottante

Les nombres à virgule flottante (nombres flottants) (floating-point numbers), sont en général des nombres non entiers dont on écrit les chiffres uniquement après la virgule et auquel on ajoute un exposant pour préciser de combien de positions la virgule doit être déplacées.

Par exemple en notation décimale, on écrira :

le nombre 31, 41592 sous la forme : $0.3141592 * 10^2$

le nombre -0,01732 sous la forme : $0.1732 *10^{-1}$

En informatique, une norme s'est imposée pour la représentation des nombres flottants. C'est la norme IEEE 754.

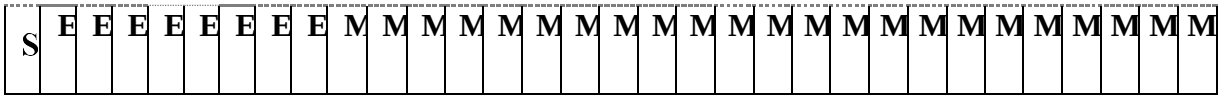
➢ La norme IEEE 754

L'IEEE 754 est un standard pour la représentation des nombres à virgule flottante en binaire. Il est le plus employé actuellement pour le calcul des nombres à virgule flottante dans le domaine informatique,

Dans la norme IEEE 754, un nombre flottant est toujours représenté par un triplet (S,E,M)

1. La première composante S détermine le signe du nombre représenté, ce signe valant 0 pour un nombre positif, et 1 pour un nombre négatif , le signe est représenté par un seul bit, le bit de poids fort (Celui le plus à gauche)
2. la deuxième E désigne l'exposant est codé sur 8 bits consécutifs au signe
3. la troisième M désigne la mantisse (les bits situés après la virgule) sur les 23 bits restants

Ainsi le codage se fait sous la forme suivante :



IEEE 754 Simple précision :

Signe (1 bit)	Exposant (8 bits)	Mantisse (23 bits)

IEEE 754 Double précision :

Signe (1 bit)	Exposant (11 bits)	Mantisse (52 bits)

Certaines conditions sont toutefois à respecter pour les exposants :

- ✓ L'exposant 00000000 est interdit
- ✓ L'exposant 11111111 est interdit. On s'en sert toutefois pour signaler les erreurs, on appelle alors cette configuration NaN (Not a Number)
- ✓ Il faut ajouter 127 à l'exposant (cas de la simple précision) pour une conversion de décimal vers un nombre réel binaire. Les exposants peuvent ainsi aller de -256 à 255.

La formule d'expression des nombres réels est ainsi la suivante :

$$\mathbf{(-1)^s \cdot 2^{(E-127)} \cdot 1,M}$$

Remarque Le 127 du (E-127) vient de $2^{\text{nbre bit de l'exposant -1}} - 1$

Exemple 1 : Trouver la représentation IEEE 754 simple précision du nombre

$(35.5)_{10}$ Le nombre est positif ➔ S=0

$(35.5)_{10} = (100011.1)_2$ ……. Virgule fixe

$= 1.000111 * 2^{5}$ ..... Virgule flottante (M= 000111)

Exposant : E-127 = 5 ➔ E= 132 = $(10000100)_2$

Donc

0	10000100	00011100000000000000
S	E	M

Exemple 2: Trouver la représentation IEEE 754 simple précision du nombre (-525.5)$_{10}$ Le nombre est négatif ➔ S=1

$(525.5)_{10} = (1000001101.1)_2$ ..... Virgule fixe

$= 1.0000011011 * 2^{9}$ ..... Virgule flottante (M= 0000011011)

Exposant : E-127 = 9 ➔ E= 136 = $(10001000)_2$

Donc

1	10001000	00000110110000000000000
S	E	M

Exemple 3 : Trouver la représentation IEEE 754 simple précision du nombre

$(-0.625)_{10}$ Le nombre est négatif ➔ S=1

$(0.625)_{10} = (0.101)_2$ ……. Virgule fixe

$= 1.01 * 2^{-1}$ ..... Virgule flottante (M= 01)

Exposant : E-127 = -1 ➔ E= 126 = $(1111110)_2$

Donc

1	01111110	01000000000000000000000
S	E	M

Exemple 4 : trouver le nombre flottant ayant la représentation IEEE754 suivante :

0	10000001	11100000000000000000000

S =0 ➔ Le nombre est positif

E = $(10000001)_2 = 129$ ➔ E-127 = 129 -127 =2

1.M = 1.111

➔ $1.111 * 2^2 = (111,1)_2 = (7.5)_{10}$