

3. Logique Modale

- **Logique modale : extension de la logique propositionnelle**
 - formalisation d'énoncés non factuels (non confirmés)
 - raisonnement sur l'incertain et les situations évolutives
- **Principe de la logique modale**
 - introduction de modalités pour la compréhension des formules
 - expressivité : entre la logique propositionnelle et la logique des prédicats
 - complexité calculatoire maîtrisée

Logique Modale

□ Logique aléthique (aristotélicienne)

■ Notions de possibilités/nécessité

- Nécessaire (il est nécessaire d'avoir A) : $\Box A$
- Possible (il est possible d'avoir A) : $\Diamond A$
- Non Nécessaire (il n'est pas nécessaire d'avoir A) : $\neg \Box A$
- Impossible (il est impossible d'avoir A) : $\neg \Diamond A$

■ Equivalences entre les deux modalités

$$\Box A \equiv \neg \Diamond \neg A$$

$$\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A$$

$$\neg \Box A \equiv \Diamond \neg A$$

$$\neg \Diamond A \equiv \Box \neg A$$

Logique Modale

□ Logique épistémique

▪ Notions de croyances

•Savoir que A : $\Box A \equiv \neg \Diamond \neg A$

•Ne pas Savoir que A : $\neg \Box A \equiv \Diamond \neg A$

•Croire que A (A est compatible avec les croyances) :

$$\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A$$

•Ne pas Croire que A : $\neg \Diamond A \equiv \Box \neg A$

Logique Modale: schémas d'axiomes

□ Logique épistémique: exemples

- Tout ce que sait Mohamed, Ali le sait

$$\forall x. \Box(\text{Mohamed})x \rightarrow \Box(\text{Ali})x$$

- Si quelqu'un sait qu'il gèle, alors il gèle

$$\exists x. \Box(x)\text{geler} \rightarrow \text{geler}$$

□ Schémas d'axiomes

- axiome K : $\Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow B)$

- règle de nécessité : $A \vdash \Box A$

Système S4 :

- axiome T : $A \rightarrow \Diamond A$

- axiome 4 : $\Box A \rightarrow \Box \Box A$

Système S5 : reprend S4 et ajoute l'axiome 5 : $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$

Logique modale propositionnelle

□ Le langage de logique modale propositionnelle (Vocabulaire)

- un ensemble infini dénombrable de propositions
- les constantes : 0 (Faux) et 1 (Vrai)
- les connecteurs \neg , \vee , \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow
- les modalités \square , \diamond

Logique modale propositionnelle

□ formules bien formées de la logique propositionnelle :

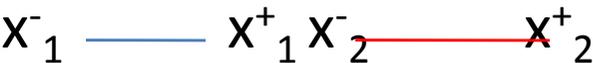
- 0 et 1 sont des formules
- une variable propositionnelle est une formule
- si A et B sont des formules alors
- $\neg A$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ sont des formules
- si A est une formule alors $\square A$, $\diamond A$ sont des formules
- si A est une formule alors $A \text{ =def } \neg \square \neg A$

Logique temporelle

Intervalle, instant et évènement

Différentes logiques.. Ici présentations de Logique de Allen.

Nouveaux prédicats :

- holds(p; t) : p est vrai pendant l'intervalle t
- occurs(e; t) \rightarrow Pt : t apparaît suite a l'évènement e implique que les préconditions nécessaires a t sont validées
- before : $x < y : (x^+_1 < x^-_2)$ 
- equals : $x = y : (x^-_1 = x^-_2) \wedge (x^+_1 = x^+_2)$ 
- meets : $x m y : (x^+_1 = x^-_2)$ 
- overlaps : $x o y : (x^+_1 > x^-_2) \wedge (x^+_1 < x^+_2)$ 
- during : $x d y : (x^-_1 > x^-_2) \wedge (x^+_1 < x^+_2)$ 
- starts : $x s y : (x^-_1 = x^-_2) \wedge (x^+_1 < x^+_2)$ 
- finishes : $x f y : (x^-_1 > x^-_2) \wedge (x^+_1 = x^+_2)$ 
- S4 axiomes. Exemple : $(x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z)$