

Series of Exercises 03

Algebraic Structure

Exercise 1 1. We provide $\mathbb{R}$ with the internal composition law $*$ defined by :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

- Show that $*$ are commutative laws, not associative laws, and 1 is a neutral element of $*$.
 - Solve the following equations : $x * 2 = 5$ and $x * x = 1$
2. We provide $\mathbb{R}^{+*}$ with the internal composition law $*$ defined by :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Show that $*$ are commutative laws, associative laws, and 0 is a neutral element of $*$.
- Show that no element of $\mathbb{R}^{+*}$ has an inverse element with $*$.

Exercise 2 Let $G =]1, +\infty[$ and $*$ the internal composition laws in G defined by :

$$\forall x, y \in G \quad x * y = (x - 1)(y - 1) + 1$$

1. Calculate $2 * 4$ and $3 * \frac{3}{2}$.
2. Show that $(G; *)$ is a commutative group.
3. Let $H = \{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$, Is that $(H, *)$ a subgroup of $(G, *)$.

Exercise 3 Let $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ and $*$ the law in G defined by :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Show that $(G; *)$ is a commutative group.
2. Let $H =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, Show that $(H, *)$ is a subgroup of $(G, *)$

Exercise 4 We consider on $\mathbb{R}$ an internal composition law given by :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a * b = a + b + \frac{1}{6}.$$

1. Show that $(\mathbb{R}, *)$ is an abelian group.
2. Let the two applications be defined of $(\mathbb{R}, *)$ in $(\mathbb{R}, +)$ by :

$$f(x) = 3x \quad \text{and} \quad g(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

Are these applications an homomorphism from a group $(\mathbb{R}, *)$ to a group $(\mathbb{R}, +)$?

Exercise 5 (will be solved in the course) We provide $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ of two laws defined by :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y) \times (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. Show that $(A, +)$ is an commutative group.
2. (a) Show that the law $\times$ is commutative.
(b) Show that $\times$ is associative.
(c) Find the neutral element of A for the law $\times$.
(d) Show that $(A, +, \times)$ is a commutative ring.

Corrigé Série de TD 03

Corrigé exercice 1 1. On a : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$

a) Montrons que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est un élément neutre.

— Montrons que $*$ est commutative :

On a : $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1) = yx + (y^2 - 1)(x^2 - 1) = y * x$
donc, la loi $*$ est commutative.

— Montrons que $*$ n'est pas associative :

Prenons $x = 0, y = 2, z = 3$, on a :

$$(x * y) * z = (0 * 2) * 3 = (-3) * 3 = 55$$

$$x * (y * z) = 0 * (2 * 3) = 0 * 30 = -899$$

donc : la loi $*$ n'est pas associative.

— Montrons que 1 est l'élément neutre : On a : $1 * x = 1 \times x + (1^2 - 1)(x^2 - 1) = x$
De plus comme la loi est commutative $x * 1 = 1 * x = x$
donc : 1 est l'élément neutre.

b) Résolvons les équations suivantes :

$$x * 2 = 5 \Leftrightarrow 2x + 3(x^2 - 1) = 5 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

donc : $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{4}{3}$

$$x * x = 1 \Leftrightarrow x^2 + (x^2 - 1)^2 = 1 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0$$

donc : $x_1 = 0, x_2 = -1$ et $x_3 = 1$

2. On a : $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$

a) Montrons que $*$ est commutative, associative, et que 0 est un élément neutre :

— La loi $*$ commutative :

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y * x$$

donc : la loi $*$ est commutative.

— La loi $*$ associative :

$$(x * y) * z = (\sqrt{x^2 + y^2}) * z = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$x * (y * z) = x * \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

donc : la loi $*$ est associative.

— On a : $x * 0 = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x| = x$ car $x > 0$
comme $*$ est commutative, alors : $x * 0 = 0 * x = x$
donc : 0 est l'élément neutre.

b) Montrons que aucun élément de $\mathbb{R}^{+*}$ n'a de symétrique pour $*$:

Supposons que x admette un symétrique x' , alors :

$$x * x' = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + x'^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x'^2 = 0 \Leftrightarrow x = x' = 0 \quad \text{or} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad x' > 0$$

donc : $x * x' = 0$ est impossible, pour tout $x > 0$, donc x n'a pas de symétrique.

Corrigé exercice 2

Exercice $\forall x, y \in G : x * y = (x-1)(y-1) + 1$
 $G =]1, +\infty[$

1) Calculons :

$$2 * 4 = (2-1)(4-1) + 1 = 4 \quad (0,5)$$

$$3 * \frac{3}{2} = (3-1)\left(\frac{3}{2}-1\right) + 1 = 2 \quad (0,5)$$

2) Montrons que $(G, *)$ groupe commutatif

C1) $*$ commutative : $\forall x, y \in G : x * y = y * x$ (0,5)

On a : $x * y = (x-1)(y-1) + 1 = (y-1)(x-1) + 1 = y * x$ (0,5)
 donc $*$ est commutative

C2) $*$ associative : $\forall x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z)$ (0,5)

$$(x * y) * z = [(x-1)(y-1) + 1] * z = (x-1)(y-1)(z-1) + 1$$

$$x * (y * z) = x * [(y-1)(z-1) + 1] = (x-1)(y-1)(z-1) + 1$$

donc $*$ est associative. (0,5)

C3) L'élément neutre: cherchons $e \in G$ tel que $\forall x \in G$:
 $x * e = e * x = x$ (0,5)

On a: $x * e = x \Leftrightarrow (x-1)(e-1) + 1 = x$

$(x-1)(e-1) = x-1 \Rightarrow e-1=1 \Rightarrow e=2 \in G$
 donc: $e=2$ est l'élément neutre de $*$ (0,5)

C4) L'élément symétrique:
 $\forall x \in G$, cherchons $x' \in G$ tel que: $x * x' = x' * x = 2$ (0,5)

On a: $x * x' = 2 \Leftrightarrow (x-1)(x'-1) + 1 = 2$

$\Rightarrow (x-1)(x'-1) = 1$

$\Rightarrow x' = \frac{1}{x-1} + 1$ (0,5)

puisque $x' = \frac{1}{x-1} + 1 \in G$, alors $x' = \frac{1}{x-1} + 1$ est

l'élément symétrique de x pour la loi $*$.
 Par la suite $(G, *)$ est un groupe commutatif.

2) $(H, *)$ sous-groupe de $(G, *)$ si: $\begin{cases} - e \in H \\ - \forall x, y \in H, x * y \in H \end{cases}$ (0,5)

- On a: $e = 2 \in H$

- pour $x=3$ et $y=4$ on a:

$x * y = 3 * (4)' = 3 * \left(\frac{1}{4-1} + 1\right) = 3 * \frac{4}{3} = \frac{(3-1)(\frac{4}{3}-1) + 1}{1} = \frac{2}{3} \notin H$ (1)

alors: $(H, *)$ n'est pas sous-groupe de $(G, *)$

Corrigé exercice 3 Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Montrons que $(G; *)$ est un groupe non commutatif :

a) Comme $x \neq 0$ et $x' \neq 0$ alors : $xx' \neq 0$ donc : $(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

donc : la loi $*$ est une loi interne.

b) On a :

$$\begin{aligned} [(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') &= (xx', xy' + y) * (x'', y'') \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \\ (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')] &= (x, y) * (x'x'', x'y'' + y') \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \end{aligned}$$

donc : la loi $*$ est associative.

c) Soit $(a, b) \in G$ tel que pour tout $(x, y) \in G$ on a :

$$(x, y) * (a, b) = (x, y) \Leftrightarrow (ax, ay + b) = (x, y)$$

donc :

$$\begin{cases} ax = x \Rightarrow a = 1 \\ ay + b = y \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

alors : $(1, 0)$ est l'élément neutre.

d) Soit $(x, y) \in G$ on cherche $(x', y') \in G$ tel que :

$$(x, y) * (x', y') = (1, 0) \Leftrightarrow (xx', xy' + y) = (1, 0)$$

donc :

$$\begin{cases} xx' = 1 \Rightarrow x' = \frac{1}{x} \neq 0 \\ xy' + y = 0 \Rightarrow y' = \frac{-y}{x} \end{cases}$$

alors, le symétrique de (x, y) est $(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x})$

donc : $(G, *)$ est un groupe.

e) Comme : $(1, 2) * (2, 0) = (2, 2)$ et $(2, 0) * (1, 2) = (2, 4)$ il est clair que ce groupe n'est pas commutatif.

2. Soit $H =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, Montrons que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$:
 H sous groupe de G si et seulement si :

$$\begin{cases} a) H \neq \emptyset \Leftrightarrow e \in H \\ b) \forall x, y \in H \Rightarrow x * y^{-1} \in H \end{cases}$$

a) L'élément neutre $(1, 0) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} = G'$, alors : $G' \neq \emptyset$

b) Soit $(x, y) \in G'$ et $(x', y') \in G'$ alors :

$$(x, y) * (x'^{-1}, y'^{-1}) = (x, y) * (\frac{1}{x'}, \frac{-y'}{x'}) = (\frac{x}{x'}, \frac{-xy' + x'y}{x'}) \in G'$$

comme $\frac{x}{x'} > 0$, alors : $(x, y) * (x'^{-1}, y'^{-1}) \in G'$

donc : $(G', *)$ est un sous groupe de $(G, *)$

Corrigé exercice 4 On considère sur $\mathbb{R}$ une loi de composition interne donnée par :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a * b = a + b + \frac{1}{6}.$$

1. Montrons que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.

a) **La commutativité :**

$$a * b = a + b + \frac{1}{6} = b + a + \frac{1}{6} = b * a$$

d'où la loi $*$ est commutative.

b) **L'associativité :**

$$(a * b) * c = (a + b + \frac{1}{6}) * c = a + b + \frac{1}{6} + c + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3}$$

$$a * (b * c) = a * (b + c + \frac{1}{6}) = a + b + c + \frac{1}{3}$$

d'où $*$ est associative.

c) On a : $a * e = e * a = a \Leftrightarrow a + e + \frac{1}{6} = a \Rightarrow e = \frac{-1}{6} \in \mathbb{R}$
d'où l'élément neutre est $e = \frac{-1}{6}$

d) $a * a' = a' * a = e \Leftrightarrow a + a' + \frac{1}{6} = \frac{-1}{6} \Rightarrow a' = \frac{-1}{3} - a \in \mathbb{R}$ donc chaque élément $a \in \mathbb{R}$ admet un élément symétrique $a' = \frac{-1}{3} - a \in \mathbb{R}$
on déduit que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.

2. Soit les deux applications définies de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$ par :

$$f(x) = 3x \quad \text{et} \quad g(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

a) $f : (\mathbb{R}, *) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ est morphisme de groupe si et seulement si : $f(x * y) = f(x) + f(y)$
On a :

$$f(x * y) = 3(x * y) = 3(x + y + \frac{1}{6}) = 3x + 3y + \frac{1}{2}$$

$$f(x) + f(y) = 3x + 3y$$

donc f n'est pas un morphisme de groupe.

b) On a : $g(x * y) = 3(x * y) + \frac{1}{2} = 3x + 3y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3x + 3y + 1$
et : $g(x) + g(y) = 3x + \frac{1}{2} + 3y + \frac{1}{2} = 3x + 3y + 1$
alors, g est un morphisme de groupe.