**SERIE 2 D’EXERCICES SUPPELMENTAIRES**

**CHAPITRE 2**

**VARIABLES ALEATOIRES**

**Exercice 1  (QCM)**

| 1. On appelle fonction de répartition d’une variable aléatoire la fonction F définie pour tout réel x par : 2. F(x)=P(X=x) 3. F(x)=P(X<=x) 4. F(x)=P(X>=x) | | |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

| 1. Soient X et Y deux variables aléatoires définies respectivement sur les univers U={1,2,3,4} et V={1,2,3,4,5,6}. Alors on sait que, pour a réel, E(X+aY)=E(X)+aE(Y). 2. Vrai 3. Faux | | |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

| 1. On lance un dé 6 fois et on note le chiffre obtenu. Cette épreuve est-elle une épreuve de Bernoulli ? 2. Oui 3. Non | | |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

| 1. On joue 40000 fois à pile ou face. La variable aléatoire égale au nombre de fois où pile est sorti suit-elle un schéma de Bernoulli ? 2. Oui 3. Non | | | |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. On lance un dé. La variable aléatoire qui vaut 4 si on obtient un nombre impair et 0 si on obtient un nombre pair a pour espérance 2. 2. Vrai 3. Faux 4. Une variable a pour loi de probabilité  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | X | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 | | P(X=x) | 0.32 | 0.15 | 0.17 | 0.41 | 0.25 | 0.12 |   Est-ce une variable aléatoire ?   1. Oui 2. Non | | |
|  |  |  |

|  | | |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

| 1. Soit X une variable aléatoire. Laquelle de ces affirmations est juste ? 2. la fonction de répartition de X est décroissante 3. la fonction de répartition de X est continue 4. la fonction de répartition de X va de R vers [0,1/2] 5. la fonction de répartition de X est croissante. |
| --- |
| 1. Le nombre n de voitures vendues dans une succursale donnée définit une variable aléatoire N. On établit que N suit la loi suivante :  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | P(N=n) | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.2 | x |   Quelle est la valeur de l’inconnu x ?  a) 0  b) 0.1  c) 0.12  d) 1 |  |  |
|  |  |  |

|  | | |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

| 1. On lance un dé. X est la variable aléatoire égale au chiffre obtenu. P(X<4)= ? 2. ½ 3. 1/3 4. ¼ | | |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

1. Quel type de variable n’existe pas ?
2. La variable aléatoire continue
3. La variable aléatoire mixte
4. La variable aléatoire discrète
5. La variable aléatoire secrète
6. La représentation sous forme de fonction en escalier F(X<=k) en fonction des valeurs de k se nomme :
7. La loi de distribution pour une variable aléatoire discrète
8. La loi de répartition pour une variable aléatoire discrète
9. Autre réponse
10. Les 2 relations suivantes sont attribuées à la variance de X :

V(X) = E(X²) - [E(X)]²   
V(X) = E([X-E(X)]²)

1. La relation (1) est fausse
2. La relation (2) est fausse
3. Les 2 sont exactes
4. L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle?
5. Événement nul
6. Événement élémentaire
7. Univers
8. Aucune de ces réponses
9. Lequel des lois de probabilités standards mentionnés ci-dessous sont des variables aléatoires discrètes?

* Distribution gaussienne
* Distribution de Student
* Distribution de Poisson
* Tout ce qui précède

1. Un signal aléatoire continu, stationnaire, de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance (DSP) nulle en dehors de l’intervalle [−B;B] est filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure νc > B.

a) Le signal de sortie est aussi stationnaire.

b) On ne peut pas prévoir la moyenne du signal de sortie.

c) Le signal de sortie a la même DSP que le signal d’entrée.

d) Le signal de sortie a la même puissance que le signal d’entrée.

**Exercice 2**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur{0,1,...,a}, où a ∈ N. On suppose que E(X)=6. Déterminer a.

**Exercice 3**

On dispose de n urnes numérotées de1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de1 à k. On choisit d'abord une urne, puis une boule dans cette urne, et on note Y la variable aléatoire du numéro obtenu. Quelle est la loi de Y ? Son espérance ?

**Exercice 4**

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur {1,...,n} {1,...,n}.

1. Déterminer P(X=Y).
2. Déterminer P(X≥Y).
3. Déterminer la loi deX+Y.

**Exercice 5**

Une variable aléatoire suit la loi de probabilité suivante :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| P(X = xi) | 0.3 | 0.05 | 0.1 | 0.05 | 0.2 | p |

Soit F sa fonction de répartition

* Calculez p
* Tracez cette fonction de densité de probabilité
* Calculez F(0.5)
* Calculez E(X)
* Calculez l’écart type σ(X)

**Exercice 6**

Soit *X* la variable aléatoire dont la fonction densité est définie sur R+ par *f* (*x*) = 4*e*-4*x* .

a) Calculer *F*(5). b) Calculer *p*(1 < *X* < 3) .

**Exercice 7**

Pour la fonction suivante, définie sur l’intervalle [0;2], déterminer la valeur de *k* pour qu’elle soit une

densité de probabilité. *f* (*x*) = *kx*3

**Exercice 8**

On considère un signal aléatoire réel à temps discret X(n; ω). Les variables aléatoires X(n; ω); n∈Z sont supposées indépendantes, de même valeur moyenne µ et de même variance σ2.

Donner l'expression de la fonction d'autocorrélation RX(n1; n2) = E[X(n1)X(n2)]. Le signal

X est-il stationnaire au second ordre ? Quel est la nature du signal aléatoire X ?

**Exercice 9**

Soit {X (t), t∈ [0, ∞)} défini comme X (t) = A + Bt, pour tout t∈ [0, ∞), où A et B sont des variables aléatoires normales indépendantes N (1,1).

* Trouvez tous les exemples de fonctions possibles pour ce processus aléatoire.
* Définissez la variable aléatoire Y = X(1) .
* Trouvez la densité de probabilité de Y
* Soit aussi Z = X(2) . Trouvez E [YZ].

**Exercice 10**

Considérons le processus aléatoire {Xn, n = 0,1,2, ⋯}, dans lequel les Xi sont i.i.d. variables aléatoires normales standard.

* Ecrire fXn(x) pour n = 0,1,2, ⋯ .
* Ecrire fXmXn (x1, x2) pour m ≠ n.

**Exercice 11**

Soit A, B et C des variables aléatoires normales indépendantes N (1,1). Soit {X (t), t∈ [0, ∞)} défini comme étant  X (t) = A + Bt, pour tout t∈ [0, ∞).

Aussi, soit {Y (t), t∈ [0, ∞)} défini comme étant Y (t) = A + Ct, pour tout t∈ [0, ∞).

* Trouvez RXY(t1, t2) et CXY(t1, t2), pour t1, t2∈ [0, ∞).

**Exercice 12**

Considérons le processus aléatoire {X (t), t∈R} défini comme X (t) = cos (t + U), où U∼Uniforme(0,2π). Montrez que X (t) est un processus stationnaire au sens large (2sd ordre) ou WSS.

**Exercice 13**

Soit X (t) un processus gaussien WSS de moyenne nulle avec RX (τ) = exp(−τ2), pour tout τ∈R.

* Trouver P (X (1) <1)
* Trouver P (X (1) + X (2) <1)

**Exercice 14**

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 dinars par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que X(Ω)={0,1,2,3} avec

P(X=0)=0,1 P(X=1)=0,3 P(X=2)=0,4 P(X=3)=0,2. P(X=0)=0,

On note Z le nombre de voitures disponibles par jour.

1. Déterminer la loi de Z. On pourra considérer dans la suite que X et Z sont indépendantes.
2. On note Y la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi deY.3.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour

**Exercice 15**

Soit Y1, Y2, Y3, ⋯ une suite de i.i.d. variables aléatoires avec moyenne E[Yi] = 0 et Var(Yi) = 4. Définissez le processus aléatoire en temps discret {X (n), n∈N} comme X(n) = Y1 + Y2 + ⋯ + Yn, pour tout n∈N. Trouvez mX(n) et RX(m, n), pour tout n, m∈N.

**Exercice 16**

Un signal numérique *m(t)* est transmis dans un canal, puis capté en présence de bruit par un récepteur.

**émetteur**

*m(t)* est un signal numérique binaire (tout ou rien) où le bit « 1 » est représenté par une tension de 1,88volt et le bit « 0 » par une tension de 0 volt. La séquence binaire comporte autant de « 0 » que de « 1 » et est caractérisée par un débit de 64 000 bits/s.



**canal (AWGN)**

b(t) est un bruit gaussien de moyenne nulle ; sa puissance moyenne est .

**Architecture de récepteur**

* Le filtre passe-haut est un filtre dont le gain est 100 et qui ne coupe que la composante continue du signal.
* le comparateur rend une décision selon la procédure suivante :

bit "0", si une tension négative est observée à l'entrée

bit "1", si une tension positive est observée à l'entrée

Soient *M* = l’état d’un bit transmis à un instant donné (0 ou 1), et *D* = la décision du comparateur relativement à ce bit (0 ou 1). Donnez le modèle statistique du canal et évaluez les probabilités conditionnelles qui le caractérisent en fonction de Q (où  la fonction d’erreur complémentaire).

**Exercice 17 :**

On considère la fonction définie par :



1. Déterminer le réel λ pour que soit une densité de probabilité.
2. Soit une va. De densité. Calculer.
3. Déterminer un intervalle  de centre 0 et de longueur tel que.
4. Quelle est la probabilité exacte de l’évènement  ?