Chapitre V : Théorème de Gauss

1. Introduction

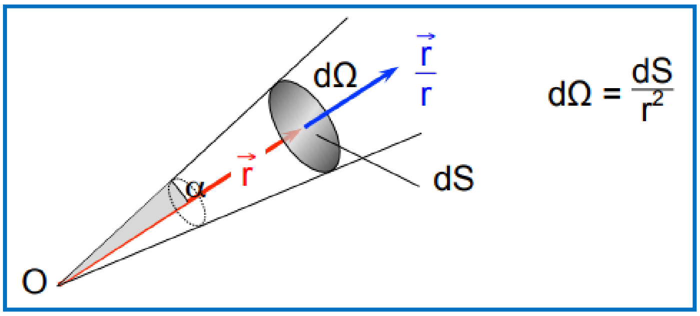
En électromagnétisme, le théorème de Gauss permet de calculer le flux d'un champ électrique à travers une surface fermée connaissant les charges électriques qu'elle renferme. Il trouve son utilité pour calculer le champ électrique en un certain point, calcul qui serait plus complexe si la loi de Coulomb était utilisée. Il faut toutefois que la répartition des charges présente une symétrie et que la surface de Gauss choisie soit adéquate. C'est une propriété générale en physique provenant du principe de Curie : les effets ont, au moins, les mêmes symétries que les causes.

Enoncé :

Le flux du champ électrique à travers une surface **S** fermée est égal à la somme des charges électriques contenues dans le volume **V** délimité par cette surface, divisée par la permittivité du vide.

2. Notion d'angle solide

Extension tridimensionnelle de la notion d'angle définie dans le plan. L'angle solide dΩ, délimité par un cône de demi-angle α coupant un élément de surface élémentaire dS situé à une distance r de son sommet O, vaut :

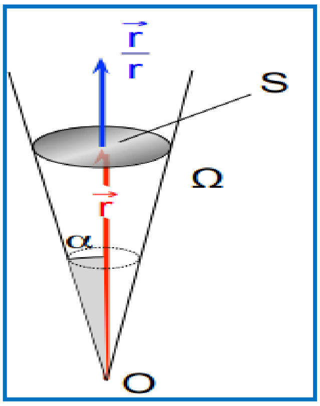


• dΩ : - est toujours positif

- est indépendant de r puisque dS ∝ r 2

- s'exprime en stéradian (sr)

• Calcul d'un angle solide Ω d'ouverture α :



En coordonnées sphériques, l'élément de surface perpendiculaire à e → r est :

dS = r2 sinθ dθ dϕ . On en déduit l'expression de dΩ :

dΩ = sinθ dθ dϕ

L'angle solide Ω d'ouverture est défini par : ϕ : 0 → 2π et θ : 0 → α

D'où l'expression de Ω : Ω = ⌠ ⌡0 2π dϕ ⌠ ⌡0 α sinθ dθ = 2π (1 – cosα)

Remarque : pour tout l'espace, θ : 0 → π avec Ω = 4π

3. Le flux électrique

3.1 Introduction

Dans le calcul de la circulation du champ électrostatique *E* , nous avons utilisé le fait que *E* est de la forme *f* (*r*)*ur* et nous avons en déduit la relation entre le champ *E* et le potentiel V. Nous allons maintenant déduire une équation du champ *E* qui dépend spécifiquement du fait que f(r) est en 1/ *r* 2 . Les développements qui suivent s'appliquent donc aux champ de la forme *ur* / *r* 2 .

3-2 Flux du champ électrostatique

3-2-1 Cas d'une charge ponctuelle

a) Flux élémentaire

Soit une charge ponctuelle q>0 placée en O et M un point de l'espace (figure III-1).

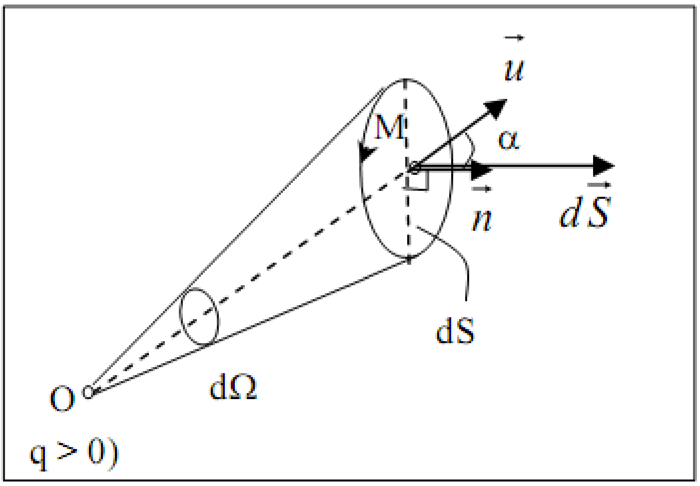


Figure 1

Le champ $E(M)$ créé par q en M est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{r^2}$$

avec, $\vec{u} = \overrightarrow{OM} / \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$

Soit dS un élément de surface entourant le point M ; orientons la surface dS (figure 1). Le flux élémentaire de $\vec{E}$ à travers la surface orientée est :

$$\boxed{d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}.d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}d\Omega \qquad (1)}$$

où, $d\Omega = \frac{\vec{u}.d\vec{S}}{r^2} = \frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}dS$:

angle solide élémentaire sous lequel du point O on voit la surface élémentaire. Le signe de dΩ dépend de l'orientation de la surface :

- $d\Omega > 0$ si $\alpha = (\vec{u}, \vec{n}) < \Pi/2$
- $d\Omega < 0$ si $\alpha > \Pi/2$

b) Flux sortant à travers une surface fermée

Soit une surface fermée Σ. On se propose de calculer le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q à travers la surface fermée Σ. Plus précisément on s'intéresse au flux sortant, donc on a choisi d'orienter le vecteur $\vec{n}$ dans le sens de la normale sortante à Σ. Deux cas seront envisagés :

- le cas où la charge q est située à l'extérieure de la surface Σ
- et celui où la charge q est située à l'intérieur de la surface Σ

Nous désignons par l'indice i les charges situées à l'intérieur de Σ et par l'indice e les charges extérieures à Σ. Soit $\vec{E}_i$ le champ créé par qi et $\vec{E}_e$ le champ créé par la charge qe.

b) Flux sortant à travers une surface fermée

Soit une surface fermée Σ. On se propose de calculer le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q à travers la surface fermée Σ. Plus précisément on s'intéresse au flux sortant, donc on a choisi d'orienter le vecteur $\vec{n}$ dans le sens de la normale sortante à Σ. Deux cas seront envisagés :

- le cas où la charge q est située à l'extérieure de la surface Σ
- et celui où la charge q est située à l'intérieur de la surface Σ

Nous désignons par l'indice i les charges situées à l'intérieur de Σ et par l'indice e les charges extérieures à Σ. Soit $\vec{E}_i$ le champ créé par qi et $\vec{E}_e$ le champ créé par qe.

<u>1èr Cas : La charge est située à l'extérieur de Σ</u>

Nous pouvons calculer le flux sortant de la surface fermée Σ (figure 2) à partir des flux élémentaires. En effet, traçons un cône élémentaire de sommet O (où se trouve la charge extérieur à Σ, qe) et d'angle solide |dΩ| . Ce cône découpe sur la surface Σ deux surfaces élémentaires dS1 en M1 et dS1' et M1'. Soient $\vec{n}_1$ et $\vec{n}'_1$ les vecteurs sortant des surfaces dS1 et dS1'. L'angle solide sous lequel du point O on voit les surfaces élémentaires orientées dS1 et dS1', a la même valeur absolue, mais de signes opposés à cause de l'orientation du vecteur normal $\vec{n}$ par rapport à $\vec{u}$ (figure 2) :

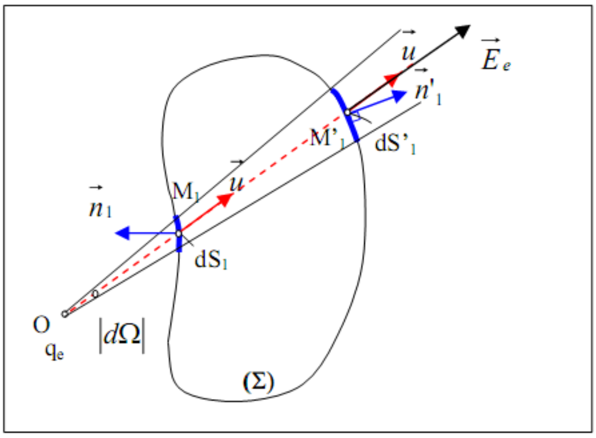


Figure 2

$$\boxed{d\Omega_1 = \frac{\vec{u}.\vec{n}_1}{r_1^2} dS_1 = -d\Omega'_1 = \frac{\vec{u}.\vec{n}'_1}{r'^2_1} dS'_1 \qquad (2)}$$

Si on considère le flux du champ $\vec{E}_e$ créé par la charge qe située en O, sortant des surfaces dS1 et dS1', d'après (1) et (2), on obtient :

$$d\Phi_1 + d\Phi'_1 = \frac{q_e}{4\Pi\varepsilon_0} d\Omega_1 + \frac{q_e}{4\Pi\varepsilon_0} d\Omega'_1 = 0$$

Pour obtenir le flux de $\vec{E}_e$ sortant de la surface Σ, $\Sigma,\ \Phi_e = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}_e.d\vec{S}$, on peut balayer toute la surface Σ à l'aide de cônes élémentaires tels que celui de la figure 2. Chacun de ces cônes intercepte sur la surface Σ une paire de surfaces élémentaires dS1 et dS1' telles que leur contribution au flux total, $d\Phi_1 + d\Phi'_1 = 0$.

On en conclut que le flux du champ électrostatique crée par une charge ponctuelle située à l'extérieur d'une surface fermée Σ, sortant de la surface Σ est nul :

$$\boxed{\Phi_e = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}_e.d\vec{S} = 0 \qquad (3)}$$

2ème Cas : La charge est située à l'intérieur de Σ

Soit (C) le cône élémentaire de sommet O et d'angle solide $d\Omega 1$ (figure 3).

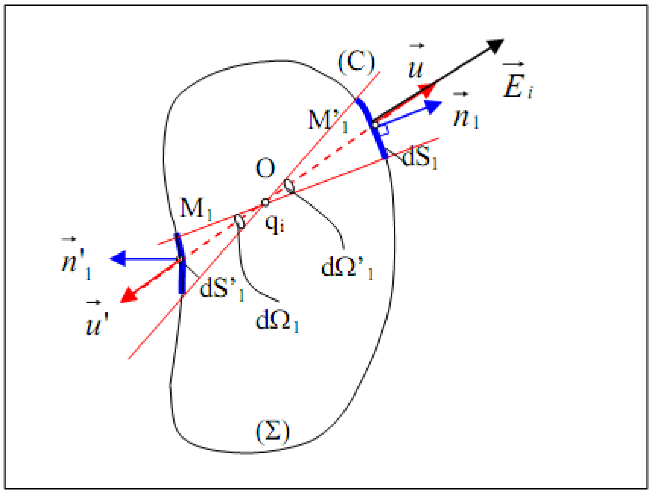


Figure 3

Dans ce cas, l'angle solide sous lequel du point O on voit dS1 est égal à l'angle solide sous lequel de O on voit dS1' :

$$d\Omega_1 = d\Omega'_1$$

d'où

$$d\Phi_1 = d\Phi'_1 = d\Phi_i$$

Ainsi, la paire de surface élémentaire dS1 et dS1' découpées par un cône élémentaire de sommet O (ou se trouve la charge qi) donne une contribution $d\Phi_1 + d\Phi'_1$ au flux total, non nulle.

Le flux élémentaire $d\Phi i$ crée par $\vec{E}_i$ à travers une surface élémentaire dSi (figure 4) est donnée par :

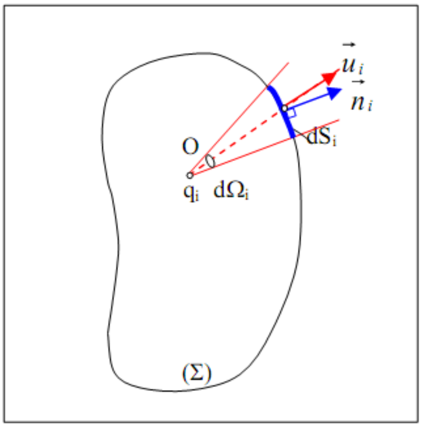


Figure 4

$$\Phi_i = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0}\oiint_\Sigma d\Omega_i$$

Le flux total sortant de Σ est la somme des flux élémentaires dΦi :

$$\Phi_i = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0}\oiint_\Sigma d\Omega_i$$

$\oiint_\Sigma d\Omega_i$ est l'angle solide sous lequel du point O, on voit la surface fermée Σ ; Ωi est donc l'angle solide sous lequel du point O on voit tout l'espace :

$$\Omega_i = 4\Pi$$

d'où :

$$\Phi_i = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

Le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle située à l'intérieur d'une surface fermée Σ, sortant de la surface Σ est égal à :

$$\boxed{\Phi_i = \oiint_\Sigma \vec{E}_i . d\vec{S} = \frac{q_i}{\varepsilon_0} \qquad (4)}$$

Ainsi, le flux total du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle est :

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_i = \Phi_i = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

Cette relation relie le flux à travers une surface fermée (Σ) et les échanges à l'intérieure de cette surface.

2-2 - Cas de n charges ponctuelles

Considérons ni charges à l'intérieure d'une surface fermée (Σ) et ne charges situées à l'extérieure de cette surface. Le champ $\vec{E}$ créé par les n charges $(n = n_i + n_e)$ est la somme vectorielle des champs créées par chacune des charges :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n_i} \vec{E}_i + \sum_{e=1}^{n_e} \vec{E}_e$$

Le flux du champ $\vec{E}$ sortant de la surface Σ est :

$$\Phi = \oiint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \oiint_\Sigma \left(\sum_i \vec{E}_i + \sum_e \vec{E}_e \right).d\vec{S} = \sum_i \Phi_i + \sum_e \Phi_e$$

D'après (3) et (4), on a :

$$\Phi_i = \frac{q_i}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \Phi_e = 0$$

d'où :

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \text{avec ,} \quad Q_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{n_i} q_i$$

Le flux sortant de la surface fermée Σ est égal à la somme, divisée par ε0, des charges intérieures à la surface Σ :

$$\boxed{\Phi = \oiint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad (5)}$$

avec, Qint : charge totale intérieure à Σ (Ce résultat constitue le théorème de Gauss.).

2-3 - Cas d'une distribution continue de charge

On peut écrire le théorème de Gauss dans le cas où la distribution de charges est continue et décrite par une densité volumique de charges ρ. La charge totale intérieure à Σ, c'est à dire contenue dans le volume v limité par la surface fermée Σ est :

$$Q_{\text{int}} = \iiint_v \rho \, d\tau$$

Où v est le volume délimitée par (Σ).
Dans ce cas le théorème de Gauss s'écrit, v étant le volume limité par la surface (Σ) :

$$\boxed{\Phi = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_v \rho \, d\tau \qquad (6)}$$

C'est l'expression du théorème de Gauss sous la forme intégrale.

2-4 - Validité du théorème de Gauss

Précisons que ce théorème est obtenu à partir de la loi de Coulomb (loi fondamentale de l'électrostatique). Ce théorème reste valable quand les charges sont en mouvement. Le théorème de Gauss est une conséquence :

1) de la loi en 1/r² régissant les interactions entre les charges électriques
2) du caractère central des forces électrostatiques
3) du principe de superposition

Nous présentons dans le tableau ci-dessous la formulation du théorème de Gauss pour le champ électrostatique.

Sources du champ	Charges
Champ créé en M par une source ponctuelle placée en P_i	$\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\lVert\overrightarrow{P_iM}\right\rVert^3}$
Flux élémentaire	$d\Phi_i = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} d\Omega_i$
Théorème de Gauss	$\Phi = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$ ou $\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_v \rho \, d\tau$

Cependant, ce théorème est également valable pour tous les champs de vecteurs de la forme $\vec{u}_r / r^2$, en particulier pour le champ de gravitation $\vec{g}$.

3 - Symétrie et invariance de la distribution de charge et caractérisation du champ et du potentiel

On rappelle que le calcul du champ électrostatique E , crée par une distribution de charge de densité volumique ρ peut être mené, soit à partir :

- de la loi de Coulomb :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho d\tau}{r^2}\vec{u}_r$$

- du potentiel V :

$$V = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho d\tau}{r}$$

$$\text{avec,}\quad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \quad \text{ou} \quad \oint_C \vec{E}.d\vec{r} = 0$$

τ est le volume de la distribution de charge, et C est un contour fermé.

- du où théorème de Gauss sous sa forme intégrale:

$$\oint_S \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Où $\vec{n}$ est la normale à la surface fermée englobant la charge q.

3-1- Symétries des sources et des effets crées : Principe de Curie

Les effets présentent les mêmes symétries que leurs causes. Les éléments de symétrie des causes (distributions D ou sources) doivent donc se retrouver dans les effets ($\vec{E}$ et V) produits.

a) Distribution de charge présentant un plan de symétrie pair (Π)

On dit qu'une distribution de charge (D) est symétrique par rapport à un plan Π, si pour deux points P et P' symétriques par rapport à Π, on a (figure 5) :

$$\boxed{\rho'(P') = \rho(P)}$$

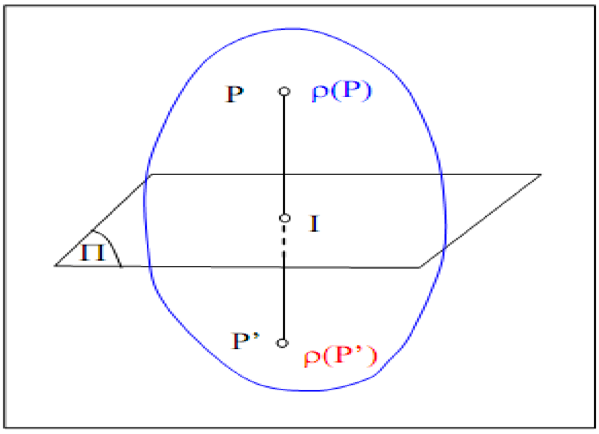


Figure 5

Pour illustrer ce cas, nous prenons deux charges identiques q placées en P et P', où P' est le symétrique de M par rapport au plan Π.

Soit M' le symétrique du point M par rapport au plan Π. On peut constater sur la figure 6 que le champ en M' est le symétrique du champ en M :

$$\boxed{\vec{E}(M') = sym\,\vec{E}(M) \text{ et } V(M') = sym\,V(M)}$$

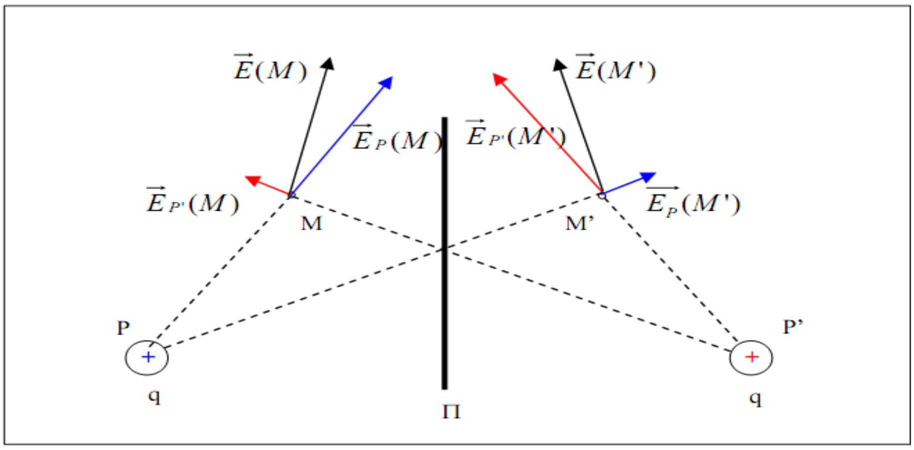


Figure 6

On remarque que les composantes du champ parallèles au plan de symétrie $\vec{E}_{//}$ sont conservées alors que celles perpendiculaires au plan $\vec{E}_{\perp}$ sont inversées :

$$\boxed{\vec{E}_{//}(M') = \vec{E}_{//}(M) \text{ et } \vec{E}_{\perp}(M') = -\vec{E}_{\perp}(M)}$$

En particulier, en un point du plan de symétrie (M = M') on a (figure 7):

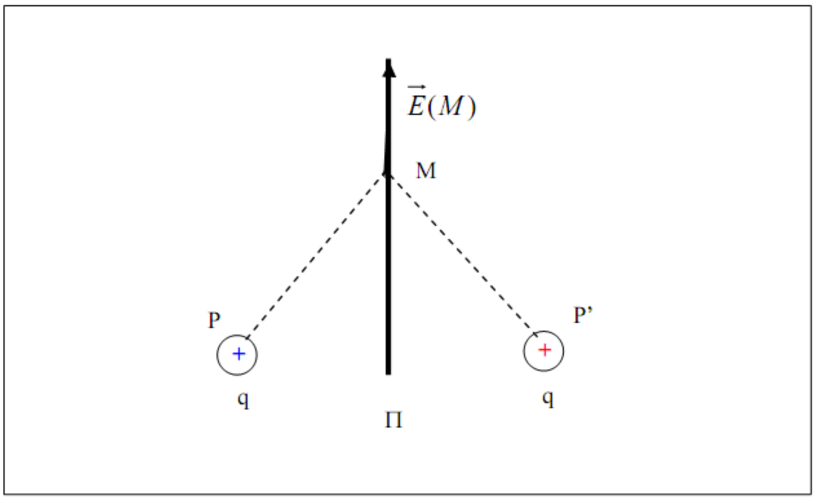


Figure 7

$$\boxed{\vec{E}_{\perp}(M) = \vec{0} \text{ d'où : } \vec{E}(M) = \vec{E}_{//}(M) + \vec{E}_{\perp}(M) = \vec{E}_{//}(M)}$$

Le champ électrique est contenu dans le plan de symétrie paire. Dune façon générale tout vecteur polaire est contenu dans le plan de symétrie paire (figure 7).

b) Distribution de charge présentant un plan de symétrie impair (Π')
Une distribution de charge possède un plan de symétrie impaire Π', si pour deux points P et P' symétriques par rapport à Π', on a

$$\boxed{\rho'(P') = -\rho(P)}$$

Pour illustrer ce cas, nous prenons deux charges q et – q placées en P et P', où P' est le symétrique de M par rapport au plan Π'.

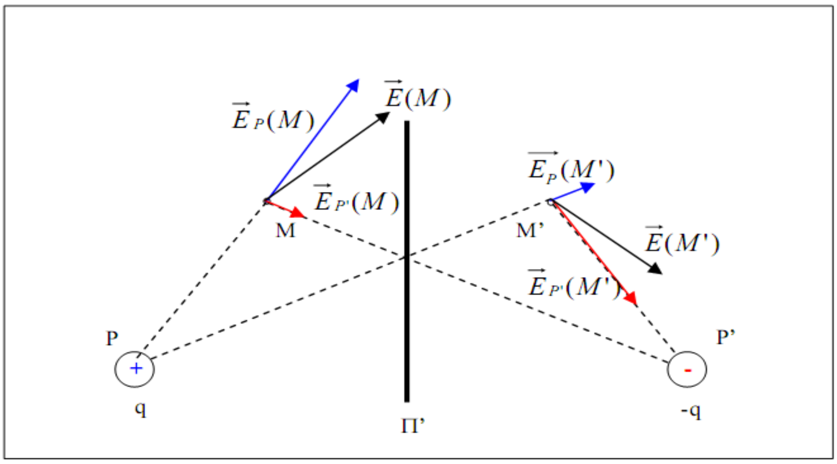


Figure 8

Soit M' un point symétrique de M par rapport à Π', On peut constater sur la figure 8 que le champ en M' est l'opposé du symétrique du champ en M :

$$\boxed{\vec{E}(M') = -sym\vec{E}(M) \text{ et } V(M') = -symV(M)}$$

Si M appartient au plan de symétrie impaire (M = M'), on aura (figure 9) :

On a donc, $\vec{E}_{//}(M) = 0$ et $\vec{E}(M) = \vec{E}_{//}(M) + \vec{E}_{\perp}(M) = \vec{E}_{\perp}(M)$

Tout vecteur polaire est perpendiculaire à un plan de symétrie impaire.

3-2 - Invariance de la distribution de charge

a) Invariance par translation le long d'un axe

Les variables dont dépendent ces composantes sont obtenues en étudiant les invariances de la distribution de charges.

Considérons l'exemple d'un fil rectiligne caractérisé par une densité linéique λ uniforme. Si on translate le fil parallèlement à lui même d'un vecteur $\vec{T}$, la nouvelle distribution D' coïncide avec D (puisque le fil est considéré infini et la distribution de charge est uniforme). (figure 10-a).

On a : $\boxed{\lambda'(P) = \lambda(P)}$

D'après le principe de Curie, le champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel V(M) sont inchangés en un point M quelconque de l'espace homogène et isotrope :

$$\boxed{\vec{E}'(M') = \vec{E}(M')}$$

Pour un autre point quelconque M' tel que:

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{T}$$

on a aussi (10-b) :

$$\vec{E}'(M') = \vec{E}(M')$$

Comme une opération de translation ne modifie pas le vecteur $\vec{E}'$, il vient :

$$\vec{E}'(M') = \vec{T}(\vec{E}(M)) = \vec{E}(M)$$

On obtient finalement

$$\boxed{\vec{E}(M') = \vec{E}(M) \text{ et } V(M') = V(M)}$$

b) Invariance par rotation autour d'un axe

Considérons une répartition de charge D de densité volumique uniforme ρ présentant un axe de révolution, c'est à dire si on fait subir à cette distribution une rotation d'angle θ autour de cet axe, la nouvelle distribution D' coïncide avec la précédente (la distribution reste invariante) (figure 11-a).

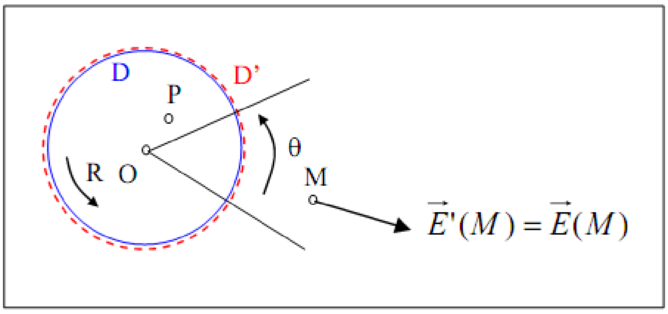


Figure 11-a

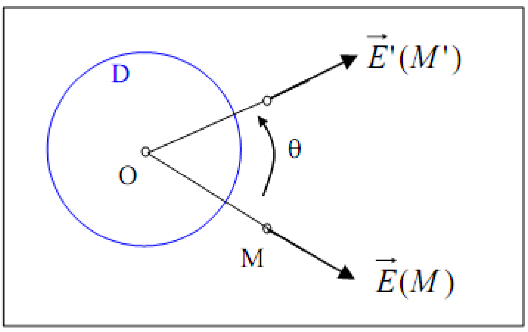


Figure 11-b

On a :

$$\boxed{\rho'(P) = \rho(P)}$$

D'après le principe de Curie, cette opération de symétrie pour D l'est aussi en un point M de l'espace homogène et isotrope, pour $\vec{E}$.

Si on considère un point M' quelconque obtenu par rotation du point M d'un angle θ on aura (figure11-b) :

$$\boxed{E'(M') = E(M')}$$

Si nous choisissons les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) (annexe 1) et Oz l'axe de symétrie de rotation de la distribution le potentiel et le champ électriques ne doivent pas dépendre de θ car le système est invariant lors de la rotation :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \vec{E}(\rho, z) \text{ et } V(M) = V(\rho, z)}$$

On voit que l'existence d'un axe de révolution et le choix approprié du système de coordonnées, ont permis de limiter le nombre de variables indépendantes dont dépendent $\vec{E}$ et V (ici a deux ρ et z).

4.1 Formulation du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss permet d'affirmer que le flux électrique mesuré sur une surface fermée quelconque est proportionnel à la charge électrique se trouvant à l'intérieur de la surface en question. Ce théorème est une réécriture permettant d'illustrer qu'une charge électrostatique génère un champ électrique coulombien et qu'une distribution de charges génère un champ électrique total respectant le principe de superposition vectoriel :

Soit une surface fermée de forme quelconque contenant une charge totale Q_{int}. Le flux du champ électrostatique à travers cette surface vaut Q_{int}/ε_0 ce qui s'écrit :

$$\Phi_E = \oiint_A \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Le théorème de Gauss est un outil très puissant pour déterminer le champ électrostatique mais uniquement pour des distributions de charges possédant des symétries (typiquement sphérique, cylindrique, plane) ce qui sera toujours le cas en classes préparatoires. Les calculs de champs électrostatiques avec des distributions de charges complexes se font numériquement par informatique.

Pour déterminer le champ électrique à partir du théorème de Gauss, il faudra suivre la démarche suivante :

- Déterminer **direction** du champ E!" à partir des considérations de **symétries** (radiale pour des géométries cylindriques et sphériques, normale pour des géométrie planes). Les symétries permettent aussi de réduire le nombre de variables d'espace dont dépend la norme de E.

- Choisir une **surface de Gauss imaginaire** dans la région où l'on souhaite déterminer E. Il faudra que la surface de Gauss possède les mêmes propriétés de symétrie que la distribution de charges et donc que du champ électrostatique.

- Calculer le **flux du champ électrostatique** à travers la surface de Gauss choisie . Le calcul de l'intégrale de surface sera très simple si l'on choisie une surface de Gauss ayant les mêmes symétries que E. La plupart du temps nous allons rencontrer les cas suivants :

  - Sphère de rayon r
  - Un cylindre de rayon r et de longueur L
  - Les deux bases d'un cylindre de base A

Calculer la **charge intérieure** à la surface de Gauss Q_{int} . Il faudra calculer Q_{int} avec la densité de charge appropriée :

- Densité linéique
- Densité surfacique
- Densité volumique

- Appliquer le **théorème de Gauss** et en déduire E .