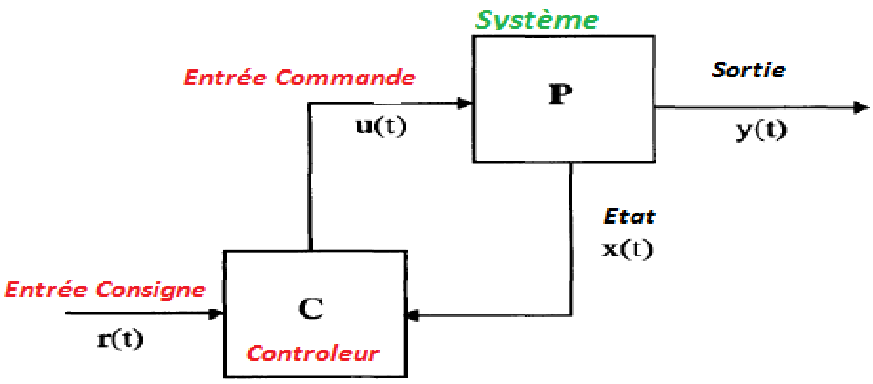
COMMANDE OPTIMALE

1. *Introduction*

L'objectif principal de la commande optimale consiste à déterminer les signaux de commande qui vont entraîner un procédé (*système*) pour satisfaire certaines contraintes physiques et en même temps maximiser ou minimiser un critère de performance choisi (*indice de performance* ou *fonction coût*).

On intéresse à trouver une loi de commande optimale u*(t) qui va conduire le système P d'aller de l'état initial vers un état final donné avec certaines contraintes sur les signaux de commande (contrôle) et les états et en même temps maximisant ou minimisant l'indice de performance donnée J.

2. *Configuration de commande optimale*



3. *Le modèle d'état*

Dans le but d'optimisation, nous décrivons un système physique par un ensemble d'équations différentielles/différence linéaire ou non linéaire.

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \qquad \text{ou} \qquad \dot{x}(t) = f(\,x(t), u(t)) \qquad (1)$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \qquad\qquad y(t) = g(\,x(t), u(t)) \qquad (2)$$

3. *Indice de performances*

Dans la conception des lois de commande par les méthodes classiques, on s'intéresse généralement à la réponse du système à une entrée donnée (échelon ou rampe), caractérisée par :

- le temps de montée;
- le temps d'établissement (réponse);
- le pic de dépassement,
- la précision en régime permanent,

Et, la réponse en fréquence du système caractérisée par:

- des marges de gain et de phase,
- et la bande passante.
- En théorie de commande avancée, le problème de commande optimale consiste à trouver une commande qui entraîne le système dynamique d'atteindre un objectif ou de suivre une variable d'état(ou trajectoire) et en même temps d'optimiser un indice de performance qui peut prendre plusieurs formes:

La commande en temps minimum

Nous essayons de transférer un système à partir d'un état initial arbitraire $x(t_o)$ à un état final déterminé $x(t_f)$ en temps minimum.

- L'indice de performance correspondant (IP) est

$$J = \int_{t_o}^{t_f} dt = t_f - t_o \tag{3}$$

Commande à consommation minimale

$$J = \int_{t_o}^{t_f} |u(t)| dt \tag{4}$$

Commande à énergie minimale

Le critère de performance correspond à l'intégrale d'une puissance :

$$J = \int_{t_O}^{t_f} u^2(t)dt \tag{5}$$

En général pour un système multi-entrées multi-sorties ce critère peut être écrit sous forme matricielle :

$$J = \int_{t_O}^{t_f} u^T(t)\, R\, u(t)dt \tag{6}$$

où R est une matrice de pondération définie positive.

De même, on peut penser la minimisation de l'intégrale de l'erreur quadratique d'un système de poursuite. Nous avons donc:

$$J = \int_{t_O}^{t_f} x^T(t)Q\, x(t)dt \tag{7}$$

Commande pour un objectif terminal

Dans un problème d'objectif terminal, nous nous intéressons à minimiser l'erreur entre la position objective X_d souhaitée et la position réelle $X_a(t_f)$ à la fin de la manœuvre ou au temps final t_f.

$$J = x^T(t_f)Fx(t_f) \tag{8}$$

En combinant les formulations précédentes, nous avons un indice de performance sous la forme générale

$$J = x^T(t_f)Fx(t_f) + \int_{to}^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \tag{9}$$

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{to}^{t_f} V(x(t), u(t), t)dt \tag{10}$$

Où,

R est une matrice définie positive, et **Q** et **F** sont des matrices semi-définies positives, respectivement.

Notez que les matrices **Q** et **R** peuvent être variables dans le temps.

La forme particulière de l'indice de performance ci-dessus est appelée **forme quadratique** (en termes d'états et contrôles).

4. Problèmes dans la commande optimale

Les problèmes qui se posent dans la commande optimale sont classés en fonction de la structure de l'indice de performance *J*.

Si l'**IP** contient la fonction de **coût terminal** S(x (t), u (t), t) seulement, il est appelé le problème Mayer;

Si l'IP a seulement le terme de **coût intégral,** il est appelé le problème de Lagrange, et le problème est de type Bolza.

Si l'IP contient **à la fois le terme de coût terminal et le terme de coût intégral**. Il existe de nombreuses autres formes de fonctions de coût en fonction de nos spécifications de performances. Toutefois, les indices de performances mentionnés ci-dessus (avec des formes quadratiques) conduisent à de bons résultats dans les systèmes de contrôle optimal.

5. Contraintes

Les contraintes caractérisent, en général, les limitations physiques sur la commande (les actionneurs) ou sur l'état du processus, par exemple la limitation d'un débit, d'une pression ou d'une température, ou l'obligation pour un avion de rester dans un « tube » de l'espace prédéfini (couloir).

Ce type de contraintes s'exprime par des inégalités de la forme :

$$u^{-} \leq u(t) \leq u^{+} \text{ et } x^{-} \leq x(t) \leq x^{+} \tag{11}$$

6. *Formulation du problème de la commande optimale*

Le problème de la commande optimale consiste à trouver la commande optimale u*(t) (* *indique la valeur optimale*) qui conduit le **<u>système linéaire invariant</u>** dans le temps:

- $\dot{x}(t)=A\ x(t)+B\ u(t)$ (12)

à suivre une trajectoire **x*(t)** qui optimise (maximise ou minimise) un indice de performance

- $J=x^T(t_f)Fx(tf)+\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)]dt$ (13)

Ou qui entraîne le système non linéaire :

$$\dot{x}(t)=f(\ x(t),u(t)) \tag{14}$$

À suivre la trajectoire *x*(t) qui optimise l'indice de performance général*

- $J=S(x(t_f),tf)+\int_{t_0}^{t_f}V(x(t),u(t),t)dt t_f t_0$

avec certaines contraintes sur les variables de commande *u(t) et/ou les variables d'état x(t).*

- L'instant final t_f *peut être fixe ou libre, et l'état final (cible) peut être entièrement ou partiellement fixe ou libre.*

Résoudre le problème de la commande optimale

- Il y a plusieurs méthodes et théorèmes pour résoudre le problème de la commande optimale à la base de calcul de variations.

7. *Généralités et Définitions*

a) <u>Fonction</u> : Une variable *x est une fonction d'une variable indépendante t, x(t)=f(t) pour chaque valeur de t sur un intervalle il correspondant une valeur x.*

Exemple : Le vecteur d'état est un exemple de fonction vectorielle.

b) <u>Fonctionnelle :</u>

Le terme « **fonctionnelle** » désigne simplement les fonctions qui en prennent d'autres fonctions comme argument.

c) <u>Incrément d'une fonction :</u>

$$\Delta f \triangleq f(t + \Delta t) - f(t) \tag{15}$$

d) <u>Incrément d'une fonctionnelle :</u>

$$\Delta J \triangleq J(x(t) + \delta(x)) - J(x(t)) \tag{16}$$

Ici $\boldsymbol{\delta(x)}$ représente la variation de fonction $\boldsymbol{x(t)}$**.**