REGULATEUR LINEAIRE QUADRATIQUE (LQR)

1- Régulateur d'état continu :

❖ Commande LQ à Horizon Fini (t_f fixe) :

Position du Problème :

On se donne un système dynamique linéaire déterministe :

$$\dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t), x \in R^n, \; u \in R^m \qquad (1)$$

Le problème de la commande optimale est de trouver la commande u(t) et la trajectoire optimale $x^*(t)$ sur l'intervalle de temps [t_0 , t_f] de sorte à minimiser la mesure de performance (fonction cout, fonctionnel, fonction objective] de forme quadratique :

$$J = x^T(t_f).S.x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}[x^T(t).Q.x(t) + u^T(t).R.u(t)]\,dt \qquad (2)$$

Les matrices S, Q et R dites matrices de Pondération étant symétriques, avec :

$$S, Q \geq 0 \; et \; R > 0, \text{dim(Q)=dim(A)=n×n, dim(R)=n×m}$$

En outre le système (1) est supposé entièrement commandable :

$$Rang\left[B, BA, BA^2, \dots \dots \dots, BA^{(n-1)}\right] = n$$

Le Hamiltonien s'écrit alors :

$$H(x,u,\lambda,t) = \lambda^T(t).A.x(t) + \lambda^T(t).B.u(t) + \frac{1}{2}[x^T(t).Q.x(t) + u^T(t).R.u(t)] \qquad (3)$$

Les équations canoniques d'optimalité produisent :

$$\lambda^{\cdot}(t) = \frac{-\partial H}{\partial x} = -A^T.\lambda(t) - Q.x(t) \tag{4}$$

$$\lambda(t_f) = S.x(t_f)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T.\lambda(t) + R.u(t) = 0 \tag{5}$$

De l'équation (5), une forme implicite de la commande s'écrit :

$$\boldsymbol{u(t) = -R^{-1}.B^T.\lambda(t)} \tag{6}$$

Sous forme matriciel, le système hamiltonien s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B.R^{-1}.B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Ricatti propose une relation linéaire entre l'état $x(t)$ et le vecteur adjoint $\lambda(t)$via une matrice définie positive P(t) (P(t)>0), dite : matrice de Ricatti dynamique, de dimension n×n, et $P(t_f)$=S:

$$\lambda(t) = P(t).x(t) \tag{8}$$

Le gradient du co-état s'écrit :

$\lambda^{\cdot}(t) = P^{\cdot}x(t) + Px^{\cdot}(t)$ (9)

D'autre part, l'équation (4) s'écrit :

$$\lambda^{\cdot}(t) = -(A^T.P + Q)x(t) \tag{10}$$

Par égalisation de (9) et (10), l'équation dynamique de la matrice de Ricatti s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} P^{\cdot}(t) + P(t).A + A^T.P(t) - P(t).B.R^{-1}.B^T.P(t) + Q = 0 \\ P(t_f) = S \end{Bmatrix} \tag{11}$$

La commande optimale obtenue est alors exprimée comme retour d'état :

$$u(t) = -K(t).x(t) \tag{12}$$

Avec K(t), dit : gain de Ricatti, exprimé comme :

$$K(t) = R^{-1}.B^T.P(t) \tag{13}$$

Remarques :

1- La matrice de Ricatti P(t) est choisie symétrique, ce qui permet la réduction du calcul de ses composants P_{ii} de n×n à $n.\left(\frac{n+1}{2}\right)$.
2- Dans l'équation (11), la matrice P(t) est calculée en rétrograde (backward), en remplaçant : P(t) par P(g), et $P^{\cdot}(t)\ par -\ P^{\cdot}(g)$
Avec g une nouvelle variable : si t=0, g=t_f.
3- Pour le calcul d'un régulateur LQR minimisant un critère quadratique sur la sortie y(t) :
$$J = y^T(t_f).S.y(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}[y^T(t).Q.y(t) + u^T(t).R.u(t)]\,dt$$
L'équation dynamique de Riacatti donnée dans (11) reste la même sauf le dernier terme Q qui sera replacé par : C^TQC

- **Commande LQ à Horizon infini :**
Soit le critère à minimiser avec un horizon infini (t_f tends vers l'infini) :
$$J = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2}[x^T(t).Q.x(t) + u^T(t).R.u(t)]\,dt \qquad (14)$$

Dans le cas d'un système LTI (Linear Time Invariant), la commande optimale est un retour d'état statique : $u(t) = -K_{st}.x(t)$,

Avec le gain de Ricatti statique exprimé par l'équation (13), et l'équation de Ricatti statique P vérifie l'équation algébrique suivante :

$$P.A + A^T.P - P.B.R^{-1}.B^T.P + Q = 0 \qquad (15)$$

Choix des Matrices de Pondération :

1- Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices Identité.
2- Dans une seconde étape, on accélère ou on décélère le système en multipliant la matrice Q par un scalaire γ : accélération ($\gamma > 0, décélération\ \gamma < 0$), jusqu'à obtenir une dynamique adaptée.
3- Dans le cas ou certains actionneurs sont sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération R leur correspondant.