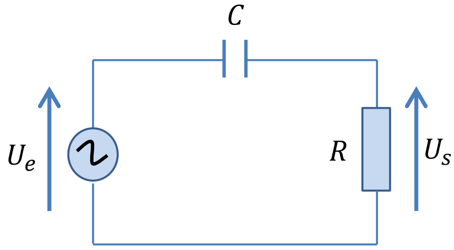
## Filtres Passifs

**Exercice 3.1** Soit le filtre passif RC dont le schéma électrique est :




$$G = \frac{jw/w_c}{1 + j\,w/w_c}$$

$$w_c = {}^{1}/_{RC}$$

a. Exprimer la fonction de transfert $G = {}^{U_s}/_{U_e}$ en fonction de $R$ et $C$.

b. Quel est le type et l'ordre de ce filtre ?

Filtre passe-haut d'ordre 1

c. Déterminer sa fréquence de coupure $f_c$ en fonction de $R$ et $C$.

d. Calculer la valeur du condensateur ainsi que la valeur de la tension de sortie du filtre pour $f_c = 627\ KHz, R = 6.8\ K\Omega$ et $U_e = 2\ V$.

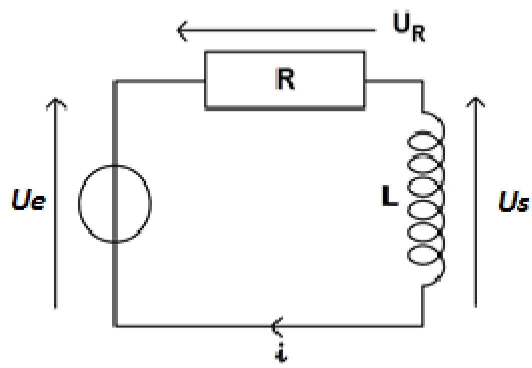
$Solution$: c. $f_c = {}^{1}/_{j2\pi RC}$ d. $C = 3737\ picoFarad$; $U_s = 1.4\ Volts$

**Exercice 3.2** a. Donner le schéma d'un filtre $RL$ passe-haut du $1^{er}$ ordre.

b. Exprimer sa fonction de transfert $G = tension\ de\ sortie/tension\ d'entrée$. Pour une résistance $R$ de $10\ k\Omega$ et une fréquence de coupure $f$ de $3.5\ KHz$, une tension de $1.6\ V$ est mésurée à la sortie du filtre lorsqu'on applique un signal de $7\ MHz$ à l'entrée du filtre.

c. Calculer dans ce cas la valeur de la bobine ainsi que la valeur de la tension à l'entrée du filtre.

d. Dessiner les diagrammes de Bode du gain et de phase pour ce filtre.



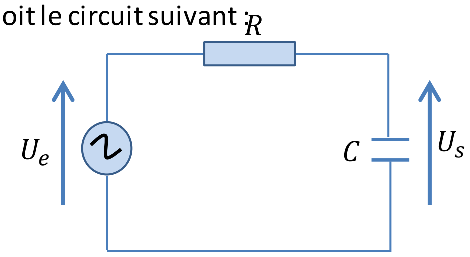

$$\boldsymbol{G = \frac{jw/w_c}{1 + j\,w/w_c}}$$

$$\boldsymbol{w_c = {}^{R}/_{L}}$$

**Solution :**

c. $\boldsymbol{L = 455\ mH}$ et $\boldsymbol{U_e = 1.79\ V}$

**Exercice 3.3** soit le circuit suivant :




$U_e = 10\,V$

$R = 1\,k\Omega$

$C = 20\,nF$

a. Quelle est la fréquence de coupure $f_c$ du circuit ?

$$f_c = 7.96\,kHz$$

b. Quel valent $U_s$, le gain $G\,(dB)$ et le déphasage $\phi$ à la fréquence de coupure ?

$$U_s = 7.07\,V \quad , \quad G_{dB} = -3\,dB \quad et \quad \varphi = -45^0$$

c. Trouver les valeurs de $U_s$, le gain $G\,(dB)$ et la phase $\phi$ à $f_c/2$ , $2\times f_c$ et $10\times f_c$ .

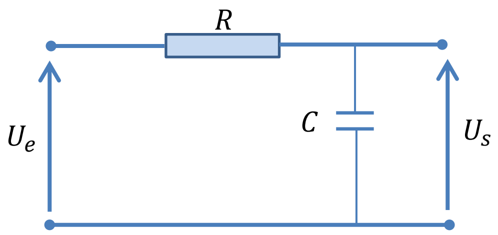
| | $f\,(Hz)$ | $U_s\,(V)$ | $G_v\,(dB)$ | $\varphi\,(degré)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_c/2$ | 3978.87 | 8.94 | -0.97 | -26.57 |
| $2\times f_c$ | 15915.49 | 4.47 | -6.99 | -63.43 |
| $10\times f_c$ | 79577.47 | 1.00 | -20.04 | -84.29 |

d. Tracer les diagrammes de Bode pour ce circuit.

**Exercice 3.4** On applique un signal sinusoïdal d'amplitude $A = 5\,V$ et de fréquence $f_m = 2\,kHz$ à l'entrée d'un filtre passe-bas passif $RC$ ayant pour valeurs des composants $R = 16\,k\Omega$ et $C = 10\,nF$.

a. Calculer le module du gain et la valeur du déphasage à la fréquence $f_m$ .

b. En déduire le retard temporel du signal de sortie sur le signal d'entrée et tracer les deux signaux sur un même graphique. (Ci-dessous schéma du filtre)

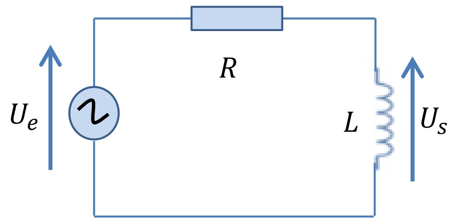



**Solution** $|H(f_m)| = 0.4252$

$et\ \varphi(f_m) = -64.84^0$

$le\ retard\ t_m = 0.09\,ms$

**Exercice 3.5** Pour le circuit suivant, on demande de :




$U_e = 10\,V$

$R = 10\,k\Omega$

$L = 100\,mH$

a. Calculer l'impédance totale $Z_0$ vue par la source alternative de fréquence $100\ kHz$.

$$\boldsymbol{Z_0 = 63.6\ k\Omega}$$

b. Quelle est la fréquence de coupure du circuit ?

$$\boldsymbol{f_c = 15.9\ kHz}$$

c. Déterminer les valeurs de $U_s$, le gain $G\ (dB)$ et le déphasage $\phi$ à la fréquence de coupure.

$$\boldsymbol{U_s = 7.02\ V,\ \ G(dB) = -3\ dB\ \ et\ \ \varphi = 45^0}$$

d. Si on branche en parallèle avec L une charge de 4.7 k :

1. Quelle seront la tension de sortie maximale Us possible et la nouvelle fréquence de coupure ?
2. Calculer $U_s$, le gain $G\ (dB)$ et le déphasage $\phi$ à cette nouvelle fréquence de coupure.

**Solution : on utilise le théorème de Thevenin**

1. $\boldsymbol{U_{smax} = 3.2\ V,\ \ f_c = 5kHz}$
2. $\boldsymbol{U_s = 2.62\ V,\ \ G(dB) = -3\ dB\ \ et\ \ \varphi = 45^0}$

**Exercice 3.6** on considère le filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-t}u(t-1)$.

a. Trouver la transformée de Fourier de la sortie $Y(j\omega)$ si on applique $x(t) = e^{-2t}u(t+1)$ à l'entrée.

$$H(p) = \frac{e^{-(p+1)}}{p+1}\ \ et\ X(p) = \frac{e^{(p+2)}}{p+2}\ \ \rightarrow \boldsymbol{Y(jw) = \frac{e}{(jw+1)(jw+2)}}$$

b. Déterminer l'expression de la sortie $y(t)$ dans le domaine temporel.

$$\boldsymbol{y(t) = \left(e^{-(t-1)} - e^{-2t+1}\right)u(t)}$$

**Exercice 3.7** Soit un filtre RC décrit par l'équation différentielle suivante :

$$10\,\frac{dy}{dt} + y(t) = x(t)$$

Donner l'expression du module et de la phase de la réponse fréquentielle du filtre $(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$.

$$\boldsymbol{H(p) = \frac{1}{10p+1} \quad \rightarrow H(jw) = \frac{0.1}{jw+0.1}}$$

$$\boldsymbol{|H(jw)| = \frac{0.1}{\sqrt{w^2+0.1^2}} \qquad et \quad \varphi(jw) = -arctg(10w)}$$

## Filtre passif passe-bas d'ordre 2

Les filtres passe-bas du second ordre ont une fonction de transfert de la forme suivante :

$$H(p) = \frac{1}{1+2\rho\frac{p}{\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \quad ou \quad H(p) = \frac{H_0}{1+2\rho\frac{p}{\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

$\omega_0 : pulsation\ propre\ ;\ \ \rho : coefficient\ d'amortissement = \frac{1}{2\,Q}$

$Q : coefficient\ de\ qualit\acute{e}\ ou\ surtension;\ \ \omega_r : pulsation\ de\ r\acute{e}sonance = \omega_0\sqrt{1-2\rho^2}\ \ ,\rho < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$H_0 : gain\ statique.$ La réponse fréquentielle de tels filtres est donnée par :

$$H(p)_{|p=j\omega} = H(\omega) = \frac{H_0}{1+j2\rho\frac{\omega}{\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$en\ module\ H = |H(\omega)| = H(p) = \frac{H_0}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+4\rho^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

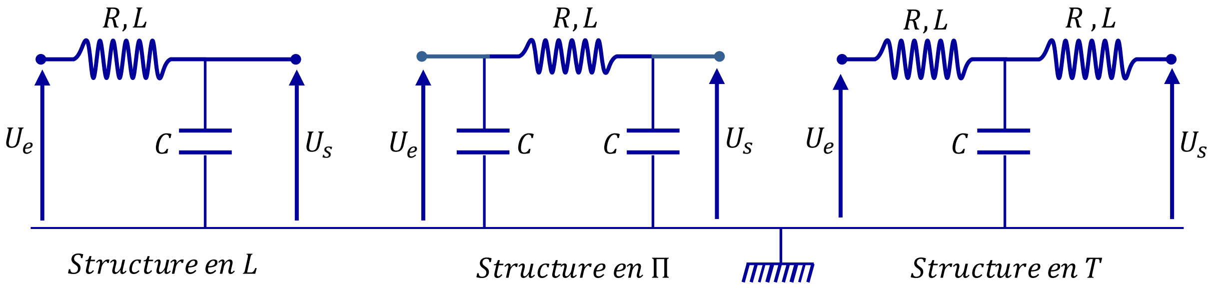
$$ou\ H_{dB} = 20\log H_0\ - 10\log\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+4\rho^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$

$on\ remarque\ que\ si :\ \ \omega \rightarrow 0\ \ alors\ \ H_{dB} \rightarrow 20\log H_0\ \ ou\ H_{dB} \rightarrow 0\ si\ H_0 = 1$

$$\omega \rightarrow \infty\ \ alors\ \ H_{dB}\ \ varie\ \ comme - 40\ log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Longrightarrow une\ chute\ de\ 12\ \ dB/Octave.$$

$$la\,phase\ \phi(\omega) = \begin{cases} arctg\dfrac{2\rho\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} & si\quad \omega < \omega_0 \\ arctg\dfrac{2\rho\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} + \pi & si\quad \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Différentes structures sont utilisées pour l'implantation de filtres passifs d'ordre 2, notamment :




Pour la structure en L, la fonction de transfert est :

$$H(\omega) = \frac{1/_{jc\omega}}{1/_{jc\omega} + R + jL\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Par identification avec l'expression générale $H(p) = \frac{H_0}{1+2\rho\frac{p}{\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$ on en déduit que :

$$H_0 = 1\ ,\ \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\quad et\ \ \rho = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

**Exercice 3.8** si on prend $L = 50\ mH$, calculer $R\ et\ C$ pour obtenir $f_0 = 1000\ Hz\ \ et\ \rho = 0{,}5$ .

On applique à l'entrée de ce filtre un signal $U_e = A_e \sin(2\pi f_e t)\ \ avec\ A_e = 5\,V\ \ et\ f_e = 2000\ Hz$ .

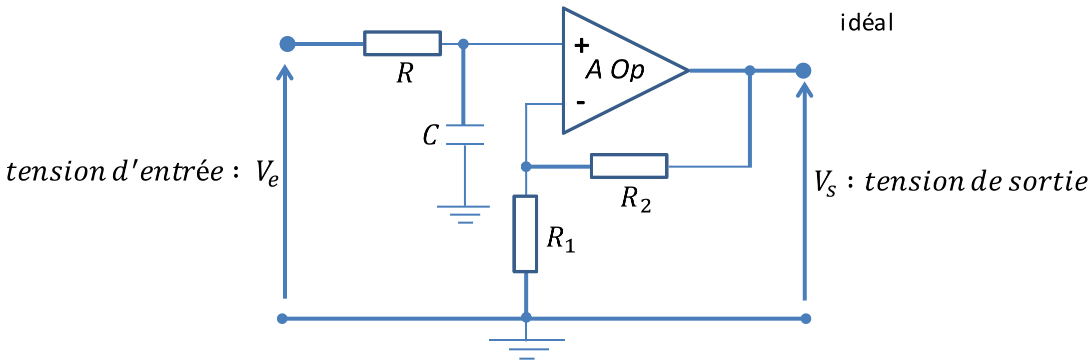
Dessiner en fonction du temps et sur le même graphique le signal d'entrée $U_e(t)$ et le signal de sortie $U_s(t) = A_s \sin\left(\,2\pi f_e t + \emptyset(f_e)\right)$.

$$\boldsymbol{R = 314\ \Omega\ \ et\ \ C = 506.6\ nF}$$

$$\boldsymbol{amplitude\ \ A_s = 1.38\ V\ \ et\ phase\ \varphi(f_e) = -2.55\ rad\ \ \rightarrow retard\ \ t_r = 0.2\ ms}$$

# Filtres Actifs

**Exercice 3.9** On se donne le circuit d'un filtre actif à base d'amplificateur opérationnel suivant :




a. Ecrire l'amplitude de la fonction de transfert d'un tel filtre sous la forme suivante :

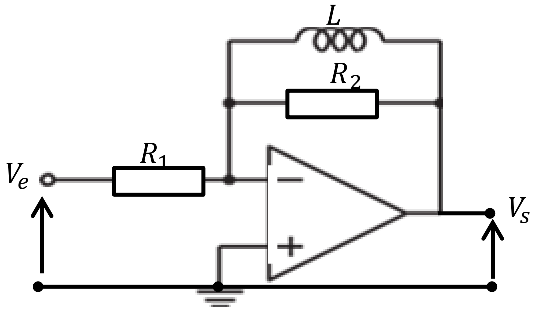
$$|H(f)| = \frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$$

$$H(jw) = \frac{R_1+R_2}{R_1}\frac{1}{1+jRCw} = K\frac{1}{1+j\frac{w}{w_c}}$$

$$|H(f)| = K\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$$

b. Quel est l'ordre et le type de ce filtre ? ***C'est un filtre passe-bas d'ordre 1***

**Exercice 3.10** Même question pour le circuit suivant :

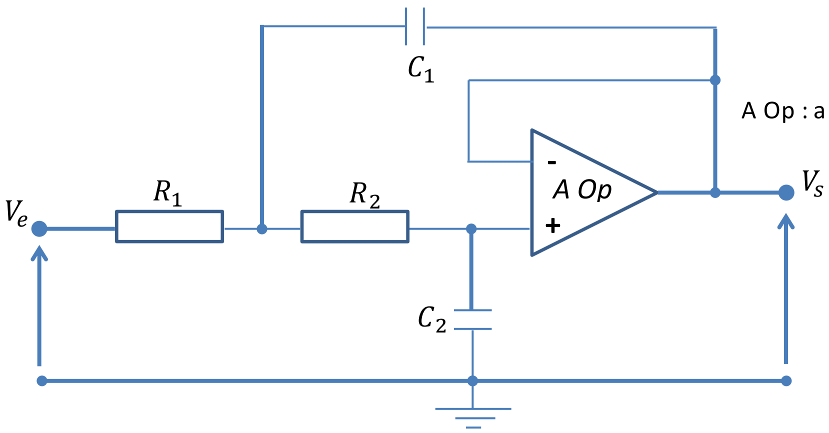



$$|H(f)| = K.\frac{f/f_c}{\sqrt{1+\left(f/f_c\right)^2}}$$

$$avec\ K = \frac{R_2}{R_1}\ \ et\ \ f_c = \frac{1}{2\pi}\times\frac{L}{R_2}$$

C'est un filtre passe-haut d'ordre 1.

**Exercice 3.11** Déterminer la fonction de transfert du filtre actif représenté par le schéma suivant :




$$H(p) = \frac{w_0^2}{p^2 + \frac{(R_1+R_2)}{C_1R_1R_2}p + w_0^2} \quad avec \quad w_0^2 = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}$$

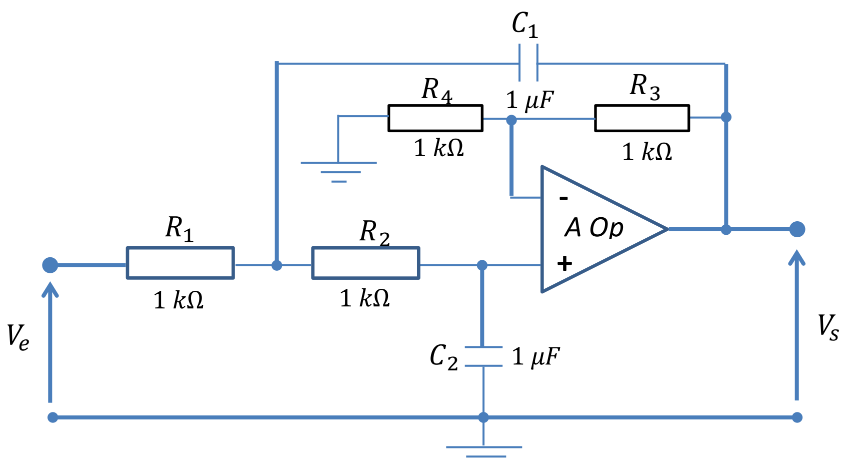
- Quel est le type de ce filtre ? C'est un filtre passe-bas

**Exercice 3.12** a - Déterminer et tracer le graphe d'amplitude de la fonction de transfert du filtre de Sallen-Key schématisé par le circuit ci-dessous.

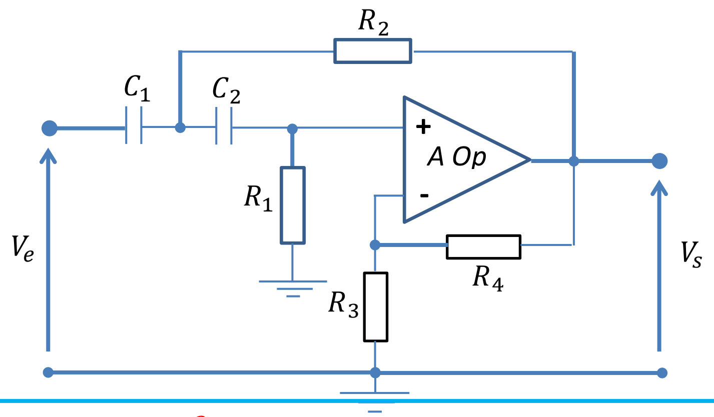
$$H(p) = \frac{k(w_0)^2}{p^2 + \left(\frac{C_2}{R_1} + \frac{C_2}{R_2} + (1-k)\frac{C_1}{R_2}\right)p + w_0^2} \quad ; \quad k = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$H(p) = \frac{2.10^6}{p^2 + 10^{-9}p + 10^6} \quad , \quad c'est\ un\ filtre\ passe-bas$$

b. – Que se passe-t-il pour la fonction de transfert si on prend $R_3 = 5\ k\Omega$.



c. Sur la figure ci-dessus, on change la position entre $R_1$ et $C_1$, et entre $R_2$ et $C_2$. On obtient alors le circuit d'un filtre suivant. Déterminer la fonction de transfert de ce filtre et dire quel est son type ?

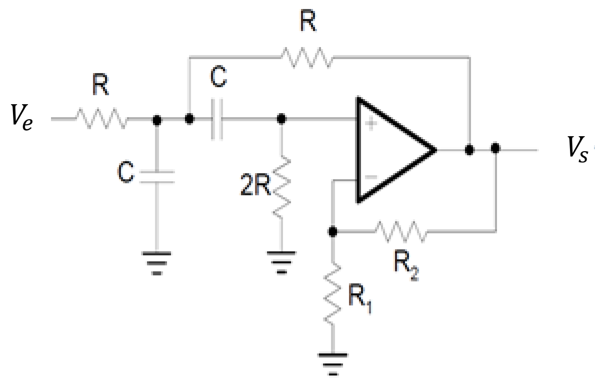



Solution

$$H(p) = \frac{k\,p^2}{p^2 + p\left(\frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1-k}{R_1C_1}\right) + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \quad ,avec\ k = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

C'est un filtre passe-haut d'ordre 2.

**Exercice 3.13** Trouver la fonction de transfert, l'ordre et le type du filtre analogique actif suivant :




Solution :

$$H(p) = \frac{\frac{k}{RC}\,p}{p^2 + \frac{1}{RC}\left(\frac{3}{2} - \frac{R_2}{R_1}\right)p + \left(\frac{1}{RC}\right)^2} \quad avec \quad k = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

C'est un filtre passe-bande

# TD Transformation de Fréquences

Les transformations de fréquences permettent de convertir un filtre passe-bas prototype de fonction de transfert $H_{pb}(p)$ en un autre type de filtres tels que le filtre passe-haut, passe-bande ou coupe-bande en changeant $p \;\; en \;\; g(p)$ de manière appropriée.

$$le\; filtre\; prototype\;\; passe-bas: H_{pb}(p) \;\; \rightarrow \;\; nouveau\; filtre: H_x(p) = H_{pb}(g(p))$$

On définit la fréquence ou pulsation centrale (moyenne géométrique) d'un filtre passe-bande ou coupe-bande par: $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{c1}\Omega_{c2}} \;\; et \;\; la\; bande\; passante \;\; \Delta\Omega = \Omega_{c2} - \Omega_{c1}$.

Les transformations pour les différents types de filtres à partir du filtre passe-bas sont données par le tableau suivant :

**Tableau de transformation de fréquences** : Pulsation de coupure $du\; filtre\; \Omega_c = 2\pi f_c$.

| ***Filtre prototype passe-bas*** | | ***Filtre obtenu après transformation*** | ***Transformation*** |
|---|---|---|---|
| Passe-bas : $\Omega_{c1}$ | $\rightarrow$ | Passe-bas : $\Omega_{c2}$ | $g(p) = \frac{\Omega_{c1}}{\Omega_{c2}}\, p$ |
| Passe-bas : $\Omega_c$ | $\rightarrow$ | Passe-haut : $\Omega_c$ | $g(p) = \frac{\Omega_c^2}{p}$ |
| Passe-bas : $\Omega_c = \Delta\Omega$ | $\rightarrow$ | Passe-bande : $(\Omega_{c1}, \Omega_{c2})$ | $g(p) = \frac{p^2 + \Omega_0^2}{p}$ |
| Passe-bas : $\Omega_c = \Delta\Omega$ | $\rightarrow$ | Coupe-bande $(\Omega_{c1}, \Omega_{c2})$ | $g(p) = \frac{p\,\Delta\Omega^2}{p^2 + \Omega_0^2}$ |

**Exercice 3.14** Transformer le filtre passe-bas d'ordre 1 suivant en un filtre passe-haut d'ordre 1 :

$$H_{pb}(p) = \frac{\Omega_c}{p + \Omega_c} \;\; \rightarrow \; H_{ph}(p) = \frac{p}{p + \Omega_c}$$

**Exercice 3.15** On demande de transformer le filtre de Butterworth passe-bas d'ordre 2, noté $H_{pb}(p)$, par un filtre passe-haut $H_{ph}(p)$:

$$H_{pb}(p) = \frac{\Omega_c^2}{p^2 + \sqrt{2}\Omega_c p + \Omega_c^2} \;\; \rightarrow \; H_{pb}(p) = \frac{p^2}{p^2 + \sqrt{2}p + \Omega_c^2}$$

**Exercice 3.16** Construire un filtre sélectif (passe-bande) d'ordre 2 ayant une fréquence centrale $\Omega_0$ et une bande passante $\Delta\Omega$.

$$H_{passe-bande}(p) = \frac{\Delta\Omega.p}{p^2 + \Delta\Omega.p + \Omega_c^2}$$

- Même question pour un filtre coupe-bande.

$$H_{coupe-bande}(p) = \frac{p^2 + \Omega_c^2}{p^2 + \Delta\Omega.p + \Omega_c^2}$$

**Exercice 3.17** La fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 2 de Butterworth ayant une bande passante de 0.2 Hz et un affaiblissement de 0.5 dB en bande passante est donnée par :

$$H_{lp}(p) = \frac{4.52}{p^2 + 3p + 4.52}.$$

Déterminer la fonction de transfert $H_{hp}(p)$ d'un filtre analogique passe-haut avec fréquence de coupure en f=2 Hz et un affaiblissement en bande passante de 0.5 dB.

$$p \to \frac{0.2}{2}p \quad ce\ qui\ donne \quad H_{lp}(p) = \frac{452}{p^2 + 30p + 452}$$

**Exercice 3.18** La fonction de transfert d'un filtre elliptique passe-bas d'ordre 2 ayant une bande passante de 0.16 Hz et un affaiblissement de 1 dB en bande passante est donnée par :

$$H_{lp}(p) = \frac{0.56(p^2 + 17.95)}{p^2 + 1.06p + 1.13}.$$

Déterminer la fonction de transfert $H_{bp}(p)$ d'un filtre analogique passe-bande avec fréquence centrale en 3 Hz et une bande passante à 3 dB de 0.5 Hz.