Jeux de coalition

Dr BELLEILI SOUICI H.

Jeux de coalition
répartition des gains

- Les jeux de coalition (JC) sont des jeux **coopératifs**. Ils ne modélisent pas les actions individuelles des joueurs mais plutôt ils s'occupent de groupes de joueurs agissant ensembles.
- Dans les JC on ne s'intéresse pas :
  1) à comment les joueurs forment les coalitions,
  2) à ce que fait chaque agent dans une coalition.
- On suppose que tout cela est déjà fourni.
- Nous nous intéressons au gain apporté par une coalition
- Coalition → Gain (payoff) → répartition des gains? → pour garantir la stabilité de la coalition

L'hypothèse de l'utilité transférable

- Les gains peuvent être distribués entre les membres de la coalition,
- À chaque coalition est assignée une valeur unique appelé *payoff* ou *gain*.
- Un jeu de coalition avec une ***utilité transférable*** est la **paire (N,v)** où:
  - N est un ensemble fini de joueurs indexés par **i** et
  - chaque coalition $\mathbf{S} \subset \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{V} \in \mathbf{R}$ appelée payoff
  - La valeur V de la coalition S peut être distribuée entre ses membres

- Les questions que l'on se pose dans les JC sont:
  - quelle coalition former? et
  - **comment le payoff d'une coalition va être distribué entre ces membres?**

JEUX SUPPER ADDITIFS

- Un jeu est **super additif** si pour tout S, T $\subset$ N , si $S \cap T = \phi$, alors $v(S \cup T) >= v(S)+v(T)$: la valeur d'une coalition est au moins aussi payante que la somme des valeurs de chacun de ses individus.
- Donc la **grande coalition** a le **plus grand payoff**. Ceci répond à la première question: la grande coalition est la plus désirée. (l'union fait la force)
- Comment va être réparti le payoff d'une coalition entre ses membres? 2 possibiltés peuvent être envisagées:

  -assurer l'**équité**, « Fairness »,

  - assurer la **stabilité** de manière à ce qu'un membre puisse rester dans la coalition et non pas aller former une autre plus petite.

LA VALEUR DE SHAPLEY

- Quelle est la manière équitable de diviser le **payoff** d'une coalition entre ces membres?
- ceci dépend de la définition de l'équité.
- Une approche adoptée est de définir **des axiomes** qui expriment les propriétés **d'une division équitable**.
- **l'idée de shapley : les membres d'une coalition recevront les payoffs proportionnels à leur contributions marginales dans la coalition.**
- Ainsi il va falloir trouver un système de pondération permettant de mesurer la **contribution marginale** d'un membre de la coalition.
- Les axiomes de shapley nous fournissent une réponse:

$\forall v, i\ et\ j\ sont\ interchangeable\ si\ \psi_i(N,v) = \psi_j(N,v)$

LES AXIOMES DE SHAPLEY

Axiome 1 : Symétrie:

2 joueurs i et j sont *interchangeable* relativement à v, s'ils contribuent toujours avec le même montant pour chaque coalition.

Å ***Formellement***: pour chaque coalition S , i$\notin$ S et j$\notin$S

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$$

$$\forall v, i\ et\ j\ sont\ interchangeable\ si\ \psi_i(N,v) = \psi_j(N,v)$$

Å Les joueurs interchangeables reçoivent les mêmes paiements.

Axiome 2

Le Joueur Dummy: la contribution du joueur ***Dummy*** est toujours =0

$$\forall S\; v(S \cup \{i\}) = v(S)$$

$$\forall v\; if\;\; i\; is\; a\; dummy\; player\;\; then\; \psi_i(\mathrm{N,v}) = 0$$

Axiome 3

Additivité: si l'on peut séparer le jeu en deux parties v=v1+v2 alors on peut décomposer le paiement

Å pour 2 valeurs de paiement v1 et v2

$$\psi_i(\mathrm{N,v1+v2}) = \psi_i(N, v1) + \psi_i(N, v2)$$

pour chaque joueur *i* où le jeu

$$(N, v1 + v2) est\ défini\ par\ (v1 + v2)S = v1(S) + v2(S) pour\ chaque\ coalition\ S$$

Théorème

Å étant donné une jeu de coalition

(N, v) *il y a un unique partage de paiement*

$x(v)$ $\Phi(N, v)$ *qui partage le paiement total de la grande coalition et satisfait les 3 axiomes:*

symetrie, dummy palyer et additivité: la valeur de Shapley.

LA VALEUR DE SHAPLEY

Å Contribution marginale du joueur i: $[v(S\cup\{i\}) - v(S)]$

Å Toutes les coalitions possibles : $|S|!\,(|N| - |S| - 1)!$

Å par rapport à la grande coalition : $\frac{1}{N!}$

Å étant donné un jeu de coalition

(N, v) la valeur de Shapley répartit les gains entre les joueurs selon :

$$\phi_i(N, v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N - \{i\}} |S|!\,(|N| - |S| - 1)!\,[v(S\cup\{i\}) - v(S)]$$

Exemple: de calcul de poids

$$\phi_i(N,v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N-\{i\}} |S|!\,(|N|-|S|-1)!\,[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

- soit un jeu de coalition G=(N,v) où N={1,2,3}
- le calcul des poids pour le joueur 1 se fait comme suit,

1	12	123	v(1)
1	13	123	v(1)
2	23	123	v(123)-v(23)
2	21	123	v(21)- v(2)
3	31	123	v(31)- v(3)
3	32	123	v(123)-v(32)

S sans 1	{}	{2}	{3}	{23}
|S|	0	1	1	2
|N| - |S| - 1	2	1	1	0
$\|S\|!\,(\|N\|-\|S\|-1)!$	2	1	1	2

le paiement du joueur 1 est $\psi_1 = \frac{1}{3!}(2 * v(1) + 2(v(123) - v(23)) + v(21) - v(2) + v(31) - v(3))$

$$\frac{1}{3}\,v(1) + \frac{1}{3}\,(v(123) - v(23)) + \frac{1}{6}(v(21)) - v(2)) + \frac{1}{6}(v(31) - v(3))$$

Discussion

- **la valeur de shapley** est toujours *calculable* et est unique.
- Le paiement résultant n'est pas toujours stable: les joueurs peuvent être amenés à quitter la grande coalition pour former une plus petite et recevoir un plus grand gain.
- **Un autre problème majeur** est sa complexité de calcul car on doit calculer tous les ordres possibles (calculable pour les petites instances)
- De plus, elle nécessite la connaissance de la valeur v de chaque singleton.

Le Core

- La valeur de Shapley assure l'équité (Fairness) dans le partage du paiement de la grande coalition entre ses membres mais ignore la stabilité.
- Les questions que l'on se posent sont:
  - qu'est ce qui garantit que les joueurs vont former la grande coalition étant donnée un partage de paiement donné?
  - n'existe t -il pas des joueurs qui préfèrent une plus petite coalition?
- En effet, il se pourrait que de plus petites coalitions sont plus attractives (*incentive* en anglais) pour des sous ensembles de joueurs.

Exemple

Å Jeu du vote majoritaire:

Å *Un parlement formé de 4 parties politiques A, B, C et D*

Å *A: 45 voix*

Å *B : 25 voix*

Å *C: 15 voix*

Å *D: 15 voix*

Å *Objet du vote: faire passer une facture de 100 M $.*

Å *Un vote majoritaire (minimum 51 voies) est nécessaire pour faire passer la loi. si la facture ne passe pas alors chacun des parties aura 0$.*

Exemple (suite)

Å En utilisant la valeur de Shapley, le paiement de chaque partie sera (A=50, B=16.67, C=16.67, D=16.67).

Å Cependant la coalition {AB} a la majorité et peut se passer de C et D le paiement pour la coalition {A,B} est (75,25).

Å Pour que les joueurs forment ***<u>la grande coalition</u>*** il faut que le profil de paiement soit dans le CORE.

Définition: Le core

- un vecteur de paiement est dans le CORE si:
- 1. $\forall_{S \subset N}, \sum_{i \in S} \overrightarrow{u_i} \geq v(S)$
- 2. $\vec{u}$ et est faisable.
- La première condition de la définition d'un core: il n'existe pas de coalition S dont la valeur v(S) est plus grande que la somme des paiements qu'auront les joueurs dans S.
- La condition 2 vérifie que le paiement total de u n'est pas plus grand que la valeur de la coalition.

EXISTENCE

A: 45 voix
B : 25 voix
C: 15 voix
D: 15 voix

- Est-ce que le *core* n'est jamais vide? NON
- on reprend le jeu de vote, l'ensemble minimal de coalitions pour avoir la majorité (51) est:
- { {A,B},{A,C}, {A,D} et {B,C,D}}.
- Si la somme des paiements des parties B, C et D est inférieur à 100M$, alors cet ensemble de joueurs seront motivés de dévier (ne pas faire de coalition ensemble).
- si B, C et D ont le paiement entier de 100M$ alors A reçoit 0 et sera tenter par former une coalition avec B ou C ou D.
- Donc on constate aucune forme de stabilité et donc le core est vide.

UNICITE

A: 45 voix
B : 25 voix
C: 15 voix
D: 15 voix

- Est-ce que le core est unique? NON
- on reprend le cas du vote majoritaire où la majorité doit être au minimum = 80%
- les coalitions minimales {A,B,C} et {A,B,D};
- n'importe quelle distribution complète des 100M$ entre les parties A et B appartient au core puisque A et B sont nécessaires dans n'importe quelle coalition gagnante puisque A et B sont indispensables .
- Ainsi les paiements (50,50,0,0) (60,40,0,0)...... appartiennent au core et donc pas d'unicité.
- Remarque: le paiement (50,30,10,10) n'est pas dans le core puisque la condition 1 n'est pas vérifiée:

$$u_A + u_B + u_c = 90 < v(\{A,B,C\}) = 100$$

Définition

1.simple Game:

$G = (N, v)$ est un jeu simple si $\forall\, S \subset N, v(S) \in \{0,1\}$

2.Veto player:

Un joueur i est un joueur Veto si $v(N - \{i\}) = 0$

3.Théoreme 1 :

Dans un jeu simple le core est vide si et seulement si il n'y a pas de joueur veto.

s'il y a des joueurs veto le core consiste aux vecteurs de paiement dans lesquels tous les joueurs non veto ont un paiement de 0.

4. Convex game:

un jeu $G = (N, v)$ est convexe si $\forall\, S, T \subset N, v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) - v(S \cap T)$.

La convexité est plus forte que la *supper additivité*.

5. Théorème 2: chaque jeu convexe a un core non vide

6. Théorème 3 : dans chaque jeu convexe la valeur de Shapley est dans le core.

Exemple: tiré de Multi-agent systems (vidal)

S	$v(S)$
{1}	1
{2}	2
{3}	2
{12}	4
{13}	3
{23}	4
{123}	6

pour trouver le CORE il faut chercher la distribution (x1,x2,x3) des paiements qui vérifient:

$$\begin{cases} x1 + x2 + x3 = 6 \\ x1 + x2 \geq 4 \\ x1 + x3 \geq 3 \\ x2 + x3 \geq 4 \end{cases}$$

parmi les paiements suivants quels sont ceux qui se trouvent dans le CORE

(2,2,2); (2,3,3), (2,1,2); (2,2,1); (1,2,2)