EXERCICES D'EXAMENS PRECEDENTS
TRAITEMENT DU SIGNAL LICENCE TELECOMMUNICATIONS

1 – Le signal $x(t)=A.\sin(2.\pi.fo.t)$, A>0, f0>0 possède :

a) une énergie totale infinie
b) une énergie totale finie
c) une puissance totale nulle
d) un spectre s'annulant en f=0
e) aucune des réponses précédentes ne convient

2 – La transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire de durée T est :

a) une fonction porte
b) un sinus cardinal
c) un peigne de Dirac
d) paire et maximale en f=0
e) aucune des réponses précédentes ne convient

3 – Le spectre d'un signal continu périodique réel est :

a) continu et périodique
b) discret
c) de module pair
d) de module impair
e) aucune des réponses précédentes ne convient

4 -Un signal continu périodique dans le domaine temporel est ...

a- continu et périodique dans le domaine fréquentiel
b- discret dans le domaine fréquentiel
c- réel et pair dans le domaine fréquentiel
d- imaginaire impaire dans le domaine fréquentiel
e- aucune des réponses précédentes ne convient

5 -Un signal réel possède une Transformée de Fourier :

a- à partie réelle paire
b- à partie réelle impaire
c- à partie imaginaire paire
d- à partie imaginaire impaire
e- aucune des réponses précédentes ne convient

6. Le signal de sortie y(t) d'un filtre est égal :

a) à la transformée de Fourier du produit de convolution du signal d'entrée par la réponse impulsionnelle de ce filtre
b) au produit de convolution du signal d'entrée par la réponse indicielle du filtre
c) au produit de convolution du signal d'entrée par la réponse en fréquence du filtre
d) au produit de convolution du signal d'entrée par la réponse impulsionnelle du filtre

7. Un filtre analogique d'ordre N possède :

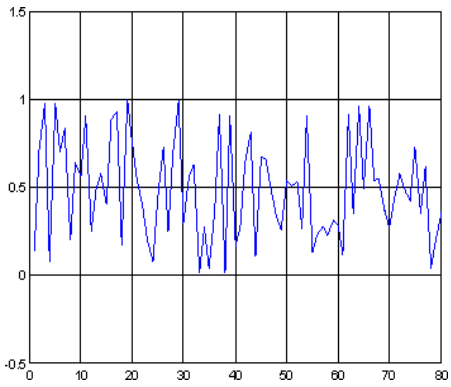
a) une FT en p (Laplace) dont le numérateur est un polynôme d'ordre N
b) une FT en p (Laplace) dont le dénominateur est un polynôme d'ordre N
c) une FT en p (Laplace) avec N zéros
d) un numérateur dont le polynôme est d'ordre supérieur ou égal au polynôme du dénominateur

8. Un signal discret dans le domaine temporel est :

a) discret dans le domaine fréquentiel
b) purement réel dans le domaine fréquentiel
c) périodique dans le domaine fréquentiel

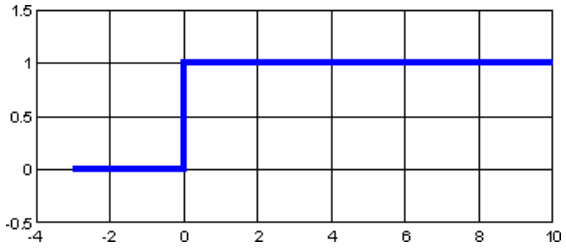
d) paire dans le domaine fréquentiel

9. Le signal représenté sur la figure est un signal :



- Non causal
- Echantillonné
- Aléatoire
- Périodique

10. L'intégrale du signal échelon :



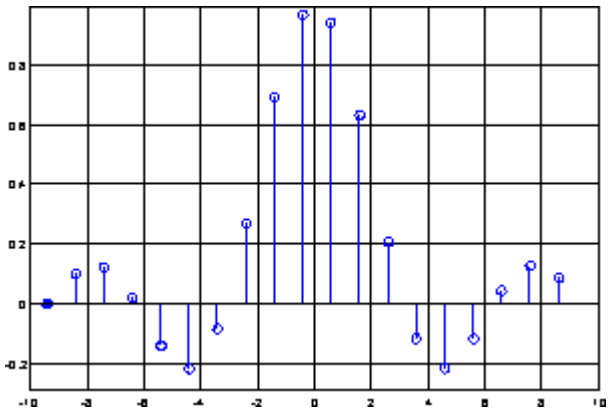
- N'existe pas
- Est une impulsion de Dirac
- Est un échelon
- Est une rampe

11. La dérivée du signal échelon :

- N'existe pas
- Est une impulsion de Dirac
- Est un échelon
- Est une rampe

12. Un signal échantillonné :
    - est un signal dont les valeurs sont limitées à 0 ou 1
    - est un signal d'amplitude et de support bornés
    - est un signal obtenu par prélèvement d'un signal continu à intervalles de temps réguliers
    - est aussi appelé signal discret
    - est un signal obtenu par tirage aléatoire

Le signal représenté sur la figure :



- est un signal continu
- est un signal discret
- est un signal causal
- est un signal périodique
- est un signal aléatoire

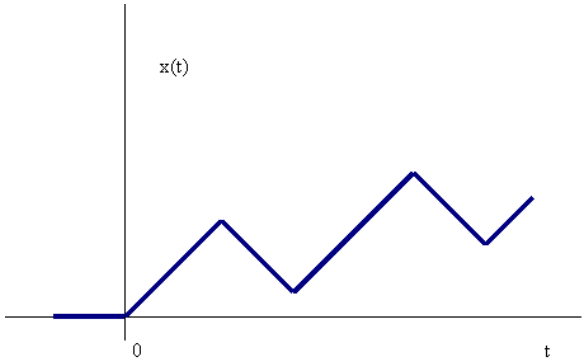
14. L'équation représentée sur la figure dé

$$M\frac{dv}{dt} = \dots$$

- Continu
- Discret
- Du premier ordre
- Du second ordre
- Linéaire

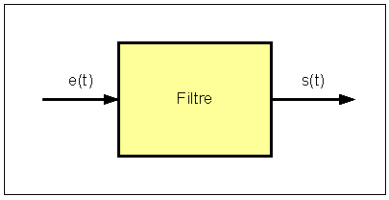
15. Un signal continu :
- est un signal d'amplitude constante
- est un signal de fréquence constante
- est une fonction à variation continue d'une variable continue
- est aussi appelé signal analogique

16. Le signal représenté sur la figure :
- est un signal continu
- est un signal discret
- est un signal causal
- est un signal périodique
- est un signal aléatoire



17. La transformée de Fourier d'une constante :
- Est une constante
- Est un échelon
- Est une impulsion de Dirac
- Est un imaginaire pur
- Est nulle

18. La sortie d'un filtre s'obtient par la convolution :



- du signal d'entrée avec la réponse impulsionnelle du filtre
- du signal d'entrée avec la fonction de transfert du filtre
- de la transformée de Laplace du signal d'entrée avec la fonction de transfert du filtre
- du signal d'entrée avec le signal de sortie
- du signal d'entrée avec lui-même

19. La relation de Parseval :
- porte sur le calcul de la puissance d'un signal
- permet le calcul d'une transformée de Fourier rapide
- ne s'applique pas aux signaux périodiques
- ne s'applique pas aux signaux non périodiques

- détermine la fréquence d'échantillonnage d'un signal

20. La transformée de Fourier d'une fonction non périodique :
- N'existe pas
- fournit un spectre discret (spectre de raies)
- fournit un spectre continu
- fournit un spectre dont le fondamental est nul
- fournit un spectre dont toutes les harmoniques sont nulles

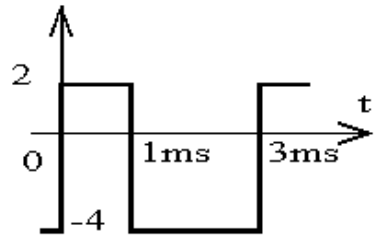
21. Si le signal $x(t)$ est périodique de période T et de fréquence F, quelle est la période et la fréquence de son harmonique de rang n ?
    - $n \cdot F$
    - F / n
    - $n \cdot T$
    - T / n

22. Le terme constant de la série de Fourier est :
- La valeur maximale du signal
- La valeur moyenne du signal
- La valeur efficace du signal

23. Soit le signal périodique suivant (on a représenté une seule période=3ms)

L'amplitude du signal est de 6 V.

- Oui
- Non



24. L'amplitude crête à crête du signal (15)
- -4
- 2
- 6

25. La valeur moyenne du signal (15) est égale à :
- -4
- -2
- 0
- 2
- 4

26. La valeur efficace du signal (15) est égale à :
- $2\sqrt{3}$
- $\sqrt{10}$
- 4
- $\sqrt{2}$

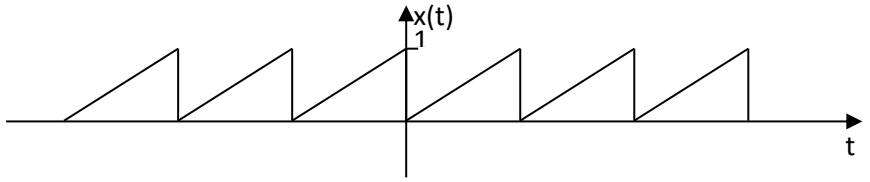
27. Sélectionnez les fréquences que laisse passer un filtre passe haut idéal dont la fréquence de coupure est de 15Khz.
    - 30Hz
    - 10kHz
    - 150kHz
    - 200MHz

28. Sélectionnez les fréquences que laisse passer un filtre passe bande idéal dont les fréquences de coupures sont 10Khz de 100Khz.

- 30Hz
- 10kHz
- 150kHz
- 200MHz

Exercice 1 :

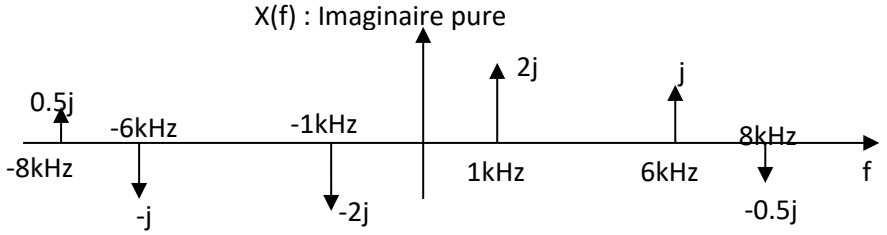
Soit le signal x(t) périodique de période 1ms représenté ci-dessous



1- Calculer sa puissance moyenne totale
2- Développer le en série de Fourier
3- En déduire son spectre de Fourier
4- Calculer le pourcentage de la puissance totale de x(t) dû à la composante continue
5- Calculer le pourcentage de la puissance totale de x(t) dû à la fondamentale

Exercice 2 :

Soit un signal dont le spectre de Fourier ne possède qu'une partie imaginaire représentée ci-dessous



1- Quelle est la période du signal x(t) ?
2- Trouvez l'expression du signal x(t)
3- Calculer sa puissance moyenne totale
4- si x(t) est l'entrée d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure 1,5kHz (il laisse passer les basses fréquences < 1,5kHz et arrête les hautes fréquences) quelle sera la sortie de ce filtre que l'on notera y(t) ? Que pouvez vous dire sur la puissance moyenne totale de y(t) ?

Exercice 3

Soit un signal x(t) donné par l'expression suivante :

$$x(t)=|\sin(t)|$$

1- Représentez graphiquement x(t)
2- Calculez son énergie totale et sa puissance moyenne totale
3- x(t) est périodique, quel est sa fréquence ?
4- développez x(t) en série de Fourier
5- calculez le pourcentage de la puissance de x(t) due à sa composante continue
6- calculez le pourcentage de la puissance de x(t) due à sa fondamentale.

Solution Exercice 3

1- Il s'agit d'un signal sinusoïdal redressé double alternance.
2- Sa puissance moyenne totale sera égale à celle du signal sinusoïdal normal. Un signal redressé double alternance a la même puissance que le signal avant le redressement. Donc on prend la valeur maximale au carré et on divise par deux.

   Puissance de x(t)=1/2=0.5

   On peut aussi le vérifier avec la formule de la puissance pour des signaux périodique :

$$P_{x(t)}=\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt=\frac{1}{T}\int_T (\sin(t))^2 dt=\frac{1}{T}\int_T \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)dt=\frac{1}{2T}(t-0.5\sin(2t))\Big|_0^T=0.5$$

   Comme sa puissance moyenne totale est non nulle et finie alors son énergie totale est infinie.

3- $\sin(t)=\sin\left(2\pi\frac{t}{2\pi}\right)$, donc la fréquence du signal sinusoïdal est $\frac{1}{2\pi}$.
   Mais comme il s'agit d'un signal redressé double alternance (valeur absolue du sinus) sa fréquence est double.
   Donc la fréquence de notre signal x(t) est $\frac{1}{\pi}$

4- x(t) est un signal paire par rapport à t et aussi non centré. Autrement dit, il possède une composante continu et aussi il n'a pas de coefficients b_k, il a que des coefficients a_k.

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T |\sin(t)|dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)dt=\frac{1}{\pi}(-\cos(t))\Big|_0^\pi=\frac{2}{\pi}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T |\sin(t)|\cos\left(2\pi\frac{k}{\pi}t\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cos(2kt)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sin((2k+1)t)-\sin((2k-1)t)}{2}\right)dt$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos((2k+1)t)}{2k+1} + \frac{\cos((2k-1)t)}{2k-1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos((2k+1)\pi)}{2k+1} + \frac{\cos((2k-1)\pi)}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right]$$

Comme :

$\cos((2k+1)t) = \cos((2k-1)t) = -1$ pour $\forall k \neq 0$ alors on aura :

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{2k+1} - \frac{2}{2k-1}\right] = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{4k^2-1}\right) = -\frac{2}{(4k^2-1)\pi}$$

Le signal prend alors la forme suivante :

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(2\pi\frac{k}{\pi}t\right)$$

5- le pourcentage de la puissance de x(t) due à la composante continue a_0

Commençant par calculer la puissance de la composante continue :

$$P_{a0} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 0.2$$

On aura donc :

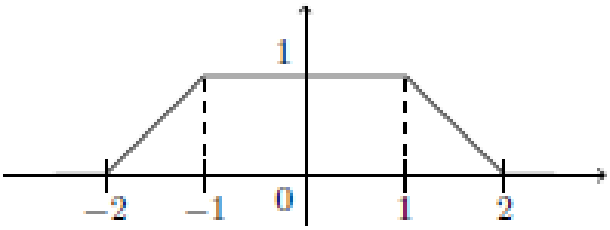
$$\frac{P_{a0}}{P_{x(t)}} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$$

6- Calculons maintenant la puissance de la composante continue $2a_1$

$$P_{2a1} = \frac{\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2}{2} = \frac{16}{45} = 0.35 = 35\%$$

Exercice 4

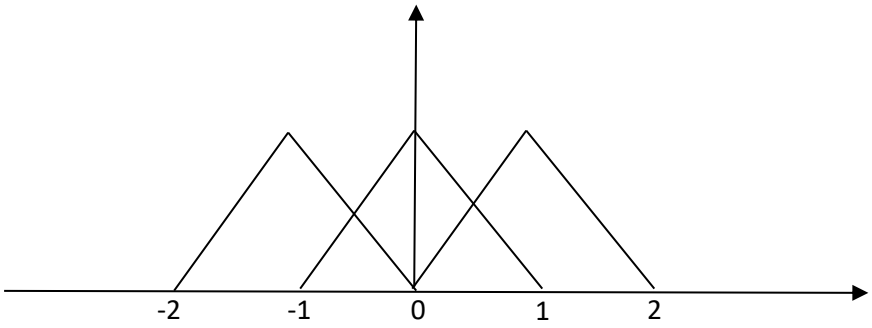
Soit un signal x(t) représenté ci-dessous :



1- Exprimez x(t) sous la forme de trois impulsions tri.
2- En déduire la transformée de Fourier de x(t)
3- Trouvez son énergie totale et sa puissance moyenne totale.
4- Tracez y(t) = -x(t-4) + x(t+4)
5- Tracez $g(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right) - x(t)$

Solution exercice 4

1- En mettant x(t) sous la forme de trois tri nous aurons



Donc x(t) s'écrit :

$$x(t) = tri\left(\frac{t+1}{2}\right) + tri\left(\frac{t}{2}\right) + tri\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

2- Sa TF peut être déduite à partir de la TF du tri et en utilisant les propriétés de la TF en particulier la propriété de linéarité et du décalage temporel (avance et retard) on obtient alors :

$$X(f) = 2\sin c^2(2f)\exp(+2\pi j 2f) + 2\sin c^2(2f) + \sin c^2(2f)\exp(-2\pi j 2f)$$

$$X(f) = 2\sin c^2(2f)\left[1 + \left(\exp(4\pi jf) + \exp(-4\pi jf)\right)\right] = 2\sin c^2(2f)\left[1 + 2\cos(4\pi f)\right]$$

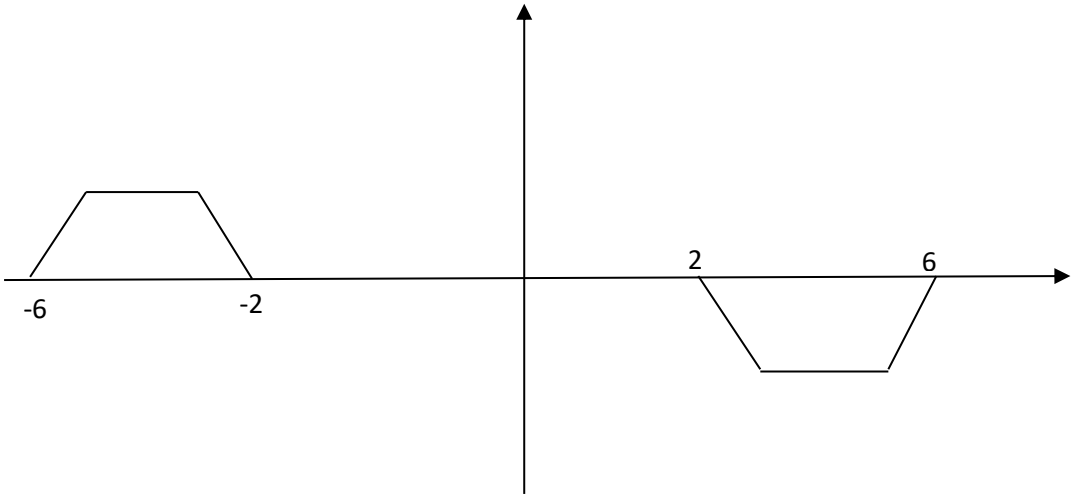
$$X(f) = 4\sin c^2(2f)\cos^2(2\pi f)$$

3- Il s'agit d'un signal de durée finie et dont toutes ses amplitudes sont finies alors il est à énergie totale finie et donc à puissance moyenne totale nulle. On calcule que l'énergie totale :

$$Ex = \int_{-2}^{+2} |x(t)|^2 \, dt = 2\left[\int_0^1 dt + \int_1^2 (-t+2)^2 \, dt\right] = 2\left[1 + \int_1^2 \left(t^2 + 4 - 4t\right) dt\right] = 2 + 2\left[\frac{t^3}{3} + 4t - 2t^2\right]_1^2$$

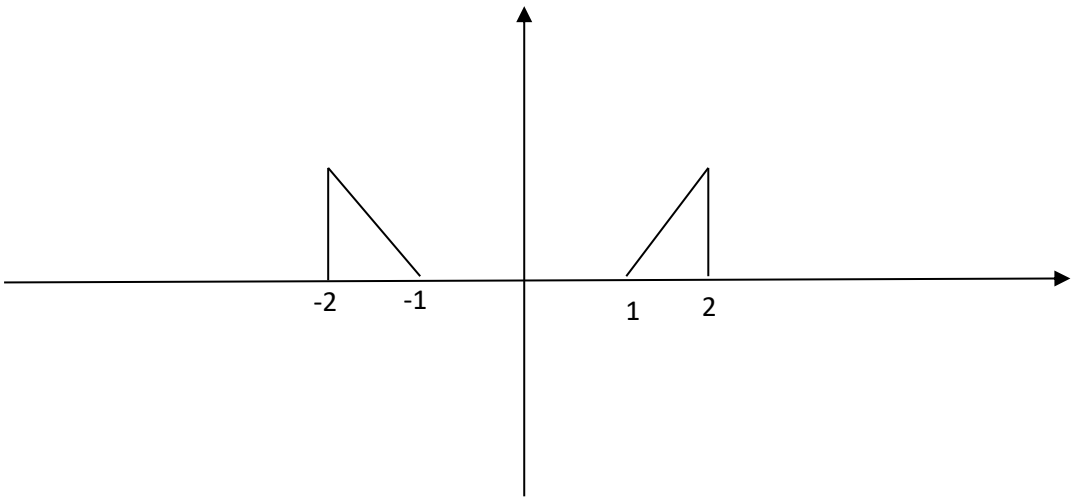
$$Ex = 2 + 2\left[\frac{8}{3} + 8 - 8 - \frac{1}{3} - 4 + 2\right] = 2\left[1 + \frac{7}{3} - 2\right] = 2\left[\frac{10}{3} - 2\right] = 2.66$$

4- Tracez y(t) = -x(t-4) + x(t+4)



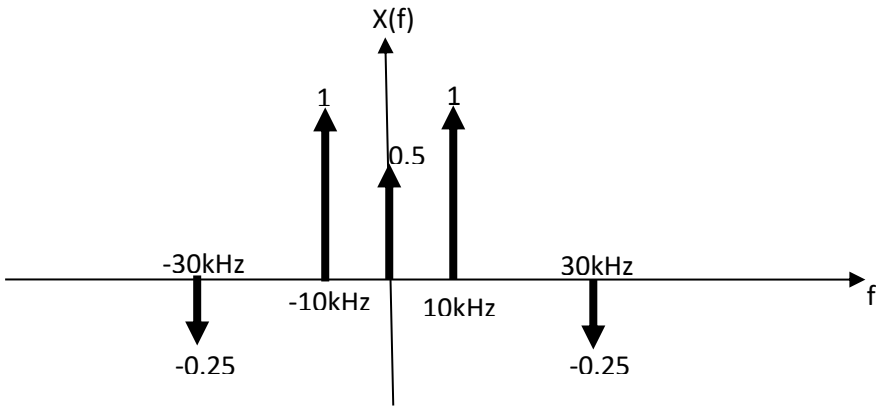
5- Tracez

$$g(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right) - x(t)$$



Exercice 5

Soit le spectre de Fourier d'un signal x(t) représenté ci-dessous :



On remarque que le spectre de Fourier de ce signal est purement réel et aussi paire par rapport à f

1- x(t) est périodique, pourquoi ? Donnez sa fréquence
2- calculez sa puissance moyenne totale et en déduire son énergie totale
3- trouvez l'expression de x(t)
4- tracez y(t) qui est donné par le signal x(t) sans les composantes de 30 kHz.

Solution Exercice 5

1- x(t) est périodique car son spectre est discret et ses différentes composantes sont espacées les unes des autres avec le même écart fréquentiel = 10kHz
La fréquence de x(t) est égale à la fréquence de sa fondamentale qui est la première raie donc la fréquence de x(t) est 10kHz.

2- Comme il s'agit d'un signal périodique sa puissance son énergie totale est infinie. Nous allons calculer sa puissance moyenne totale. D'après le théorème de Parseval nous pouvons calculez cette puissance dans le domaine fréquentielle car :

$$P_{x(t)} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Ou les α_n sont les coefficients de Fourier.

Dans notre cas nous obtenons :

$$P_{x(t)} = 0.5^2 + 2\times(1)^2 + 2\times(0.25)^2 = 0.25 + 2 + 0.125 = 2.375$$

3- x(t) est de la forme :

$$x(t) = a_0 + 2a_1\cos(2\pi 10^3 t) + 2a_3\cos\left(2\pi 3\times 10^2 t\right)$$

$$x(t) = 0.5 + 2\cos(2\pi 10^3 t) - 0.5\cos\left(2\pi 3\times 10^2 t\right)$$

4- y(t) est x(t) sans les composantes de 30kHz. Alors y(t) prend la forme suivante :

$$y(t) = 0.5 + 2\cos(2\pi 10^3 t)$$

C'est donc un cos avec une composante continue de 0.5. y(t) a donc un minimum égal à -1,5 et un maximum égal à 2,5.

Exercice : 6

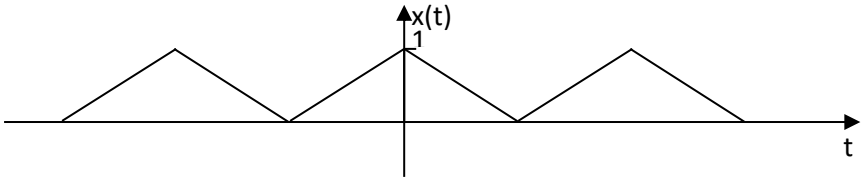
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \lambda x^2 & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le réel λ pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une va. De densité f . Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Déterminer un intervalle I de centre 0 et de longueur $2l$ tel que $P(X \in I) \geq 0.5$.
4. Quelle est la probabilité exacte de l'évènement $\{X \in I\}$?

<u>Exercice 7</u>

Soit le signal x(t) périodique de période 1ms représenté ci-dessous



1- Calculer sa puissance moyenne totale
2- Développer le en série de Fourier
3- En déduire son spectre de Fourier

Exercice 8

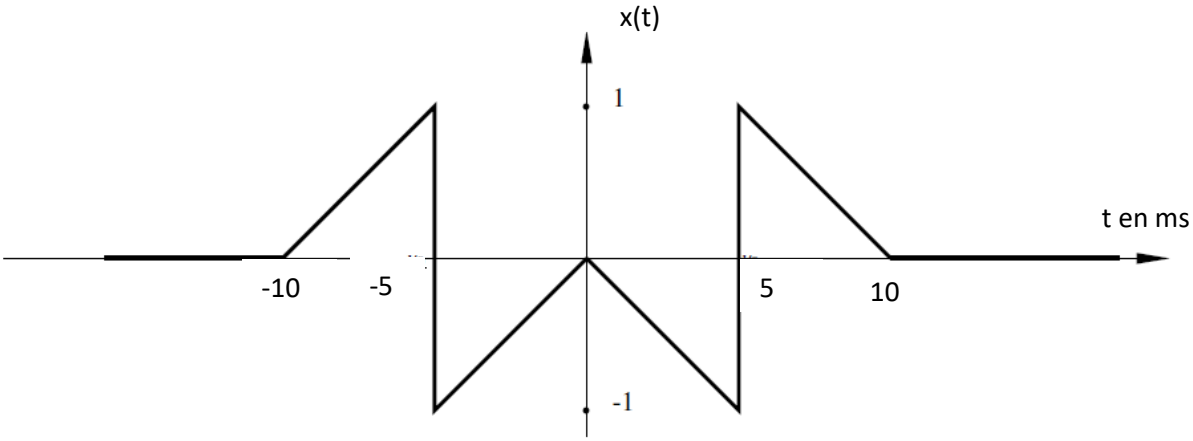
Soit un signal x(t) donné par l'expression suivante

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{0.002}\right)\sin\left(2\pi 1000t\right)$$

1- Tracez x(t)
2- Est-il à énergie totale finie ou infinie ? Justifiez
3- Trouver le spectre de Fourier de chacun des deux parties de x(t) séparément (le spectre du rect seul et le spectre du sinus seul)
4- Sans calcul, pouvez vous donnez une allure du spectre de Fourier

Exercice 9 :

Soit un signal représenté ci dessous



1) Calculez l'énergie totale de x(t) et en déduire sa puissance moyenne totale
2) Mettez x(t) sous forme d'une impulsion rect et d'une impulsion tri
3) En déduire sa TF
4) Déterminez graphiquement la dérivée de x(t)

Solution Exercice 9 :

1. Il s'agit d'un signal de durée finie et dont l'amplitude est toujours finies donc c'est un signal à énergie totale finie et à puissance moyenne totale nulle.

De plus il est pair par rapport à t, ce qui nous permet de calculer l'intégrale des amplitudes au carrée entre 0 et 10 et multiplier le résultat par 2 pour trouver l'énergie totale.

$$E_x = 2\int_0^5 \left(-\frac{t}{5}\right)^2 dt + 2\int_5^{10} \left(-\frac{t}{5}+2\right)^2 dt$$

$$E_x = 2\int_0^5 \left(\frac{t^2}{25}\right) dt + 2\int_5^{10} \left(\frac{t^2}{25}+4-4\frac{t}{5}\right) dt$$

$$E_x = 2\left(\frac{t^3}{75}\right)_0^5 + 2\left(\frac{t^3}{75}+4t-2\frac{t^2}{5}\right)_5^{10}$$

$$E_x = 3{,}33 + 2(13{,}33 + 40 - 40 - 1{,}66 - 20 + 10) = 6{,}66$$

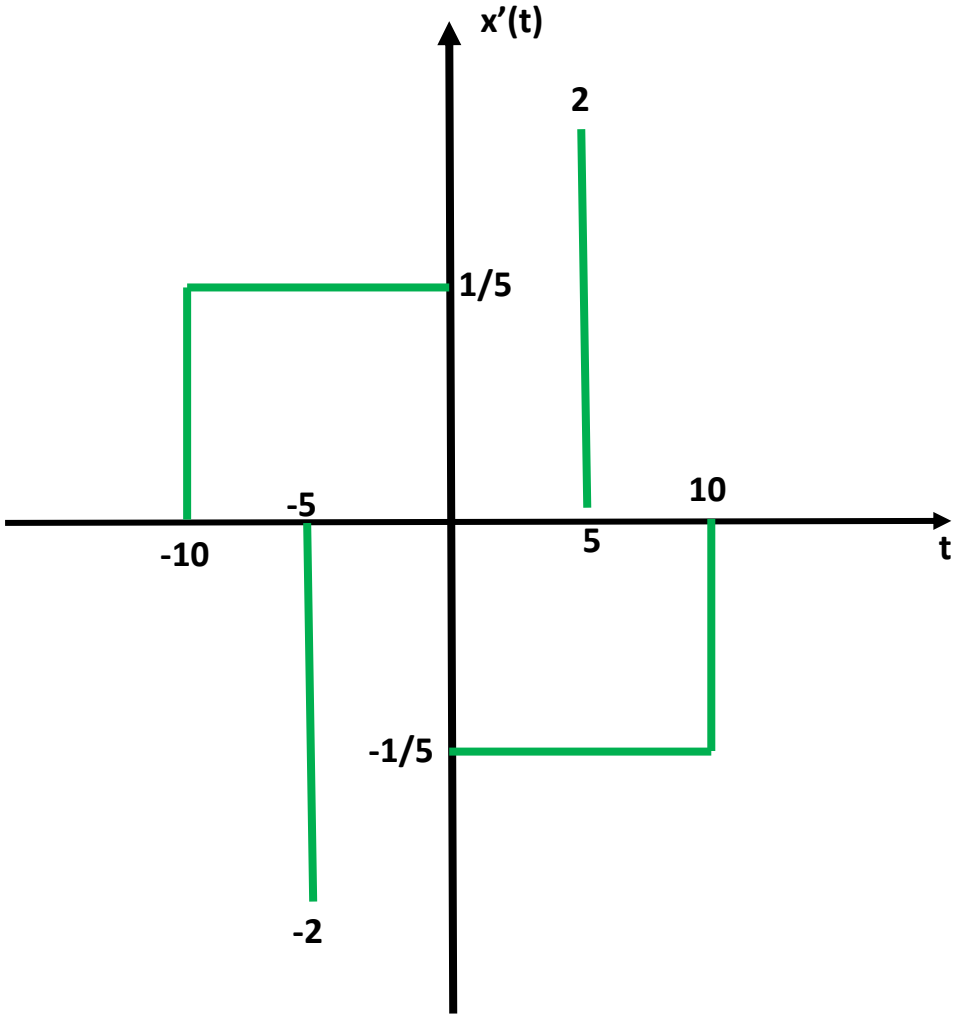
2. L'expression de x(t) est :

$$x(t) = 2Tri\left(\frac{t}{10}\right) - 2rect\left(\frac{t}{10}\right)$$

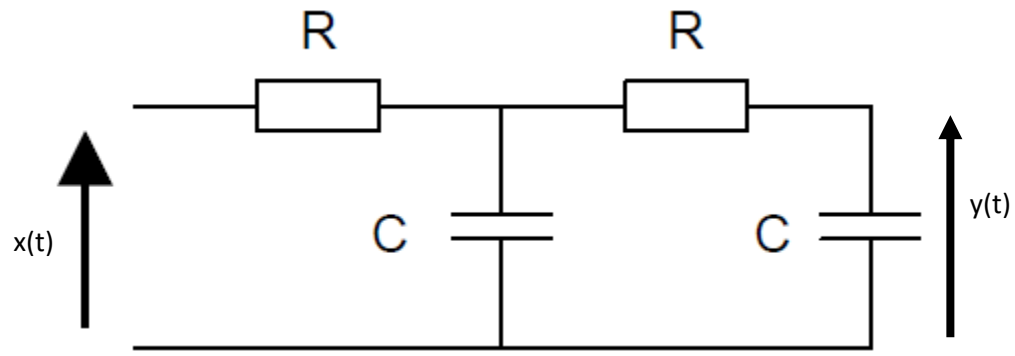
3. La TF de x(t) est directement déduite à partir des TF du tri et du rect

$$X(f) = 20\sin c^2(10f) - 20\sin c(10f)$$

4.



Exercice 10
Soit un filtre



1. Trouver l'équation différentielle temporelle entre l'entrée x(t) (une tension) et la sortie y(t) (une tension). Quelle est l'ordre de ce filtre ?

2. Montrer que la réponse fréquentielle de ce filtre peut se mettre sous la forme :

$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{T_0}{1+2mj\frac{f}{f_0}-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

Exprimer T0 (appelée amplification statique), f0 (appelée fréquence propre) et m (appelé coefficient d'amortissement).
Application numérique : R = 10 kW, C = 10 nF.
3. Exprimer la fréquence de coupure.
4. Donnez une allure du module de H(f)

5. si $x(t)=5+2\cos\left(2\pi 10^3 t+\frac{\pi}{4}\right)+1.5\cos(2\pi 10^5 t-\frac{\pi}{3}$ quelle sera l'expression de y(t) ?

Solution Exercice 10 :

1. Pour trouver l'équation différentielle temporelle entre x(t) et y(t) nous allons utiliser la loi des mailles et des nœuds

$$x(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}\int i_1(t)dt$$

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)$$

$$\frac{1}{C}\int i_1(t)dt = Ri_2(t) + y(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int i_2(t)dt$$

L'équation (4) nous donne donc :

$$i_2(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

En remplaçant cette dernière équation dans la 3ème équation nous obtenons

$$\frac{1}{C}\int i_1(t)dt = RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

Ce qui nous donne alors

$$i_1(t) = RC^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + C\frac{dy(t)}{dt}$$

Connaissant les expressions des courants et en les remplaçant dans la première équation on obtient

$$x(t) = R\left(RC^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + C\frac{dy(t)}{dt} + C\frac{dy(t)}{dt}\right) + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

$$x(t) = R^2C^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

Ce filtre est du second ordre

2. Pour trouver la réponse fréquentielle de ce filtre il suffit d'appliquer à l'équation différentielle la TF en respectant les propriétés de la TF

$$X(f) = R^2C^2(2\pi jf)^2Y(f) + 3RC2\pi jfY(f) + Y(f)$$

$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{1}{-R^2C^2(2\pi f)^2+6RC\pi jf+1}$$

Posons

$$f_0=\frac{1}{2\pi RC}$$

m=1,5 et T_0=1 nous obtenons

$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{T_0}{1+2mj\frac{f}{f_0}-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

3.

$$|H(f)|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2+\left(3\frac{f}{f_0}\right)^2}}$$

Pour obtenir la fréquence de coupure il faut trouver

$$|H(f_c)|=\frac{|H(f)|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Comme $|H(f)|_{\max}=1$ alors

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2\right)^2+\left(3\frac{f_c}{f_0}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(1-\left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2\right)^2+\left(3\frac{f_c}{f_0}\right)^2=2$$

AN : $f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi 10^{-4}} = 1592{,}35\text{Hz}$

Et

$$f_c = 596\,\text{Hz}$$

En remplaçant les valeurs de fc et f_0 dans l'équation ci-dessus on voit bien qu'elles correspondent exactement ce qui nous permet d'affirmer que 596Hz est bien la fréquence de coupure de ce filtre.

4. Pour f=0 le module de la réponse fréquentielle est égal à 1

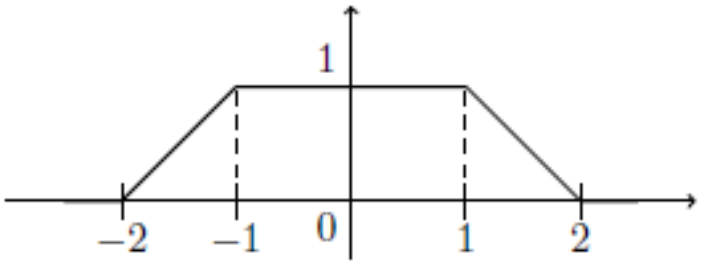
Pour f tendant cers l'infini ce même module tend vers 0

Il s'agit donc d'un filtre passe-bas dont la bande passante est comprise entre 0 et 596Hz

Mais ce filtre est

Exercice 11

Soit le signal x(t) représenté ci-dessous



1. S'agit-il d'un signal à énergie totale finie ou bien à puissance moyenne totale finie ? Calculer son énergie totale et aussi sa puissance moyenne totale.
2. Représentez ce signal sous la forme d'une somme de trois signaux élémentaires identiques qui diffèrent uniquement par leurs retards ou avances.
3. En déduire son spectre de Fourier et essayez de le simplifier
4. Donnez graphiquement la dérivée de ce signal
5. En déduire son spectre de Fourier

Corrigé de l'Exercice 11

1. Comme ce signal n'est pas périodique, sa durée totale est finie et toutes ses amplitudes sont bornées (<=1) alors il est à énergie totale finie. De ce faite il est à puissance moyenne totale nulle.

   NB : 0.5 point si la justification est faite sinon 0pt

   Le calcul de l'énergie totale de ce signal peut être effectué comme suit :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

Comme ce signal a un domaine de définition (durée du signal) entre –2 et +2 et de plus il est pair alors cette énergie totale peut être calculée par :

$$E_x = 2\times\left[\int_0^{+1} 1^2 \, dt + \int_1^2 (-t+2)^2 \, dt\right] = 2\times\left[\int_0^{+1} 1^2 \, dt + \int_1^2 (t^2 - 4t + 4) dt\right] = 2\times[1+\frac{1}{3}] = \frac{8}{3}$$

NB : 0.5 point pour la calcul de l'énergie totale

2. $$x(t) = Tri\left(\frac{t+1}{1}\right) + Tri\left(\frac{t}{1}\right) + Tri\left(\frac{t-1}{1}\right) = Tri(t+1) + Tri(t) + Tri(t-1)$$

NB : 1 point si le résultat est bon sinon 0

3. Comme nous connaissons la TF d'un tri(t/T)

$$TF\left(Tri\left(\frac{t}{T}\right)\right) = T\sin c^2(Tf)$$

Dans notre cas la durée du Tri vaut T=1

De plus la propriété de la TF quand le signal a subit un retard ou une avance
$TF(y(t-\tau)) = Y(f)\exp(-2\pi jf\tau)$
Enfin la propriété de la linéarité de la TF à savoir la TF d'une somme de fonctions est égale à la somme des TF.

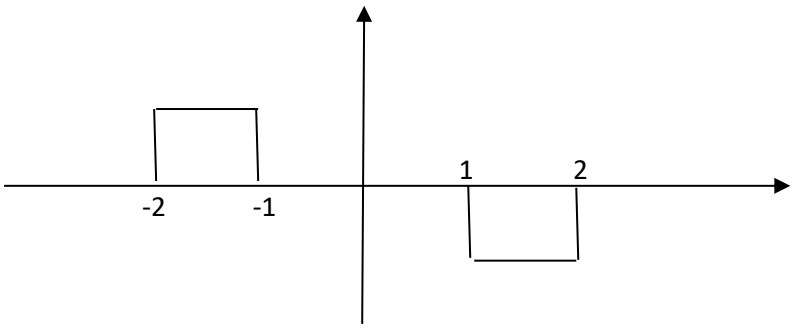
Alors nous pouvons déduire la TF de notre signal
$X(f) = \sin c^2(f)\exp(2\pi jf) + \sin c^2(f) + \sin c^2(f)\exp(-2\pi jf)$

NB : 0.5 point si le résultat est bon mais l'étudiant s'arrête ici et ne simplifie pas ce résultat

$$X(f) = \sin c^2(f)[\exp(2\pi jf) + 1 + \exp(-2\pi jf)] = \sin c^2(f)[1 + 2\cos(2\pi f)]$$

NB : 0.5 point si le résultat est bon et simplifié comme illustré ci dessus

4. Pour la dérivée graphique de ce signal, il suffit de savoir que le signal est composé uniquement de segments de droites et de constante. La dérivée d'un segment de droite est une constante (la pente de la droite) et la dérivée d'une constante est 0.



NB : 1 point si tout est bon sinon 0

5. Pour la TF de la dérivée nous allons pouvoir la déduire à partir de la propriété de la dérivation de la TF

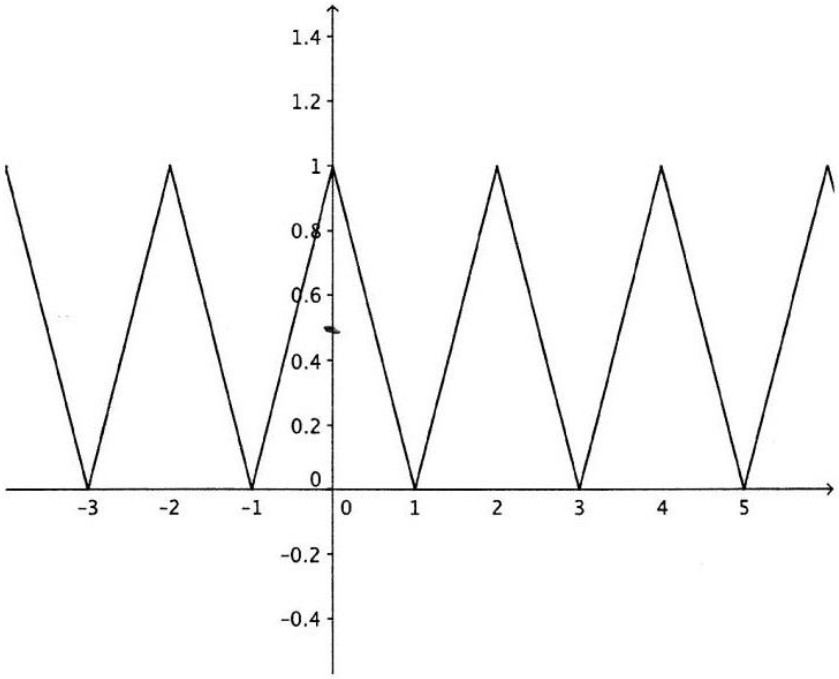
$$TF\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = 2\pi jfY(f)$$

Donc on déduit la TF de la dérivée de notre signal à partir de la TF du signal lui-même

$$TF\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = 2\pi jf \times \sin c^2(f)[1+2\cos(2\pi f)]$$

Exercice 12

Soit un signal périodique x(t) représenté ce dessous



1. Quelle est la fréquence de ce signal ?
2. Est-il centré ? Si non calculez sa valeur moyenne
3. Calculez sa puissance moyenne totale
4. Trouvez l'amplitude de sa fondamental. Pour cela on vous donner la relation suivante :

$$\int_0^1 (1-t)\,\cos(\pi t)\,dt = \frac{2}{\pi^2}.$$

5. Quel pourcentage représente la puissance de la fondamentale par rapport à la puissance moyenne totale du signal.

Corrigé de l'exercice 12 :

1. La période de ce signal est égale à 2 (par exemple 2s si on suppose que t est en secondes)
   La fréquence est donc f=1/T=1/2=0.5 Hz

NB : 1 point si tout est bon sinon 0 et le résultat est bon

2. Non ce signal n'est pas centré car toutes ses amplitudes sont positives ou nulles.

   La valeur moyenne d'un signal périodique est égale au coefficient a_0 de son développement au série de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)dt$$

Comme notre signal est pair nous pouvons calculer a_0 sur une moitié de période multipliée par 2

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^1 (-t+1)dt = \frac{2}{2}\left(-\frac{t^2}{2}+t\right)_0^1 = \frac{1}{2}$$

NB : 1 point si tout est bon sinon 0 et le résultat est bon

3. Comme il s'agit d'un signal périodique donc son énergie totale est infinie et sa puissance moyenne totale peut être calculée à partir de

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

Comme notre signal est pair nous pouvons calculer sa puissance moyenne totale sur une moitié de période multipliée par 2

$$P_x = \frac{2}{T}\int_0^1 (-t+1)^2 dt = \frac{2}{2}\int_0^1 (t^2-2t+1)dt = \left(\frac{t^3}{3}-t^2+t\right)_0^1 = \frac{1}{3}$$

NB : 1 point si tout est bon sinon 0 et le résultat est bon

4. Il faut trouver le coefficient de Fourier du fondamental. On rappelle qu'une signal périodique et en plus pair (ses coefficients b_k sont tous nuls) peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right)$$

Les a_k sont donnés par :

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right)$$

Mais ce qui nous intéresse c'est uniquement le coefficient a_1 correspondant au fondamental

$$a_1 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

Comme note signal est pair, le calcul peut être effectué sur une moitié de période multiplié par 2

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = \frac{2}{2}\int_0^1 (-t+1)\cos\left(2\pi\frac{t}{2}\right) = \int_0^1 (1-t)\cos(\pi t) = \frac{2}{\pi^2}$$

L'amplitude du fondamental est donc : $2\times a_1 = \frac{4}{\pi^2} \cong 0.4$

NB : 1 point si tout est bon sinon 0 et le résultat est bon

5. Le fondamental est un signal cosinusoidal donc sa puissance moyenne totale est égale au carré de son maximum divisé par 2 soit

$$P_{fondamentd} = \frac{(2a_1)^2}{2} = \frac{(0.4)^2}{2} = 0.08$$

Que représente cette puissance du fondamental par rapport à la puissance totale du signal. Pour cela on doit calculer le rapport

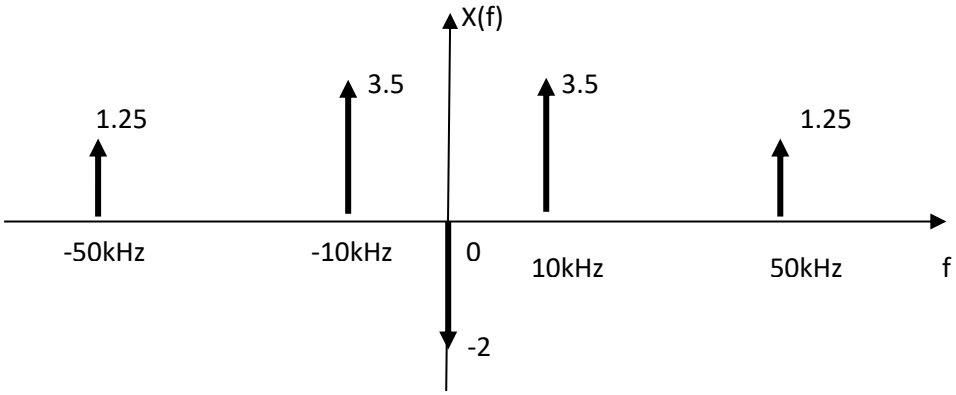
$$\frac{P_{fondamentd}}{P_x} = \frac{0.08}{\frac{1}{3}} = 0.24$$

On déduit donc que la puissance du fondamental représente 24% de la puissance moyenne totale du signal x(t).

NB : 1 point si tout est bon sinon 0 et le résultat est bon

Exercice 13

Soit le signal x(t) dont le spectre de Fourier (réel pur) est représenté ci-dessous



1. Est-il périodique ? Si oui quelle est sa période
2. S'agit-il d'un signal à énergie totale finie ou bien à puissance moyenne totale finie ? Calculer son énergie totale et aussi sa puissance moyenne totale.
3. Trouver le signal x(t)
4. On applique ce signal à l'entrée d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure = 20kHz. Donner l'expression du signal de sortie y(t)
5. On applique ce même signal à l'entrée d'un filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure = 20kHz. Donner l'expression du signal de sortie s(t)
6. Quelle sera la différence si les filtres en (4) et (5) n'étaient pas idéaux ?