Université Badji Mokhtar Annaba
Département d'électronique

Solution TD 1
Master 1 Système de télécommunications
Convolution et corrélation

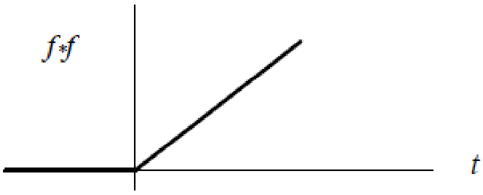
Exercice 1 :

Soit le signal échelon $f(t) = E_0\ U(t)$, d'amplitude E_0.
Représenter graphiquement et calculer le produit de convolution de $f(t)$ par lui-même (auto-convolution).

Solution Exercice 1 :

Pas de problème particulier. Si $t < 0$, il n'y a pas de recouvrement. Si $t > 0$, il y a recouvrement entre 0 et t.
On obtient :

$$f * f = \int_{-\infty}^{+\infty} E_0 U(t) E_0 U(t-\tau) d\tau = \begin{cases} E_0^2 \text{ pour } t > 0 \\ 0 \text{ pour } t < 0 \end{cases}$$



Exercice 2 :

On définit la fonction *Rect* par :

$$f(t) = Rect(t/\tau) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-\tau/2, +\tau/2] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, pour un rectangle centré sur «*t=centre*», de hauteur 1 et d'une largeur donnée par «*largeur*», on utilisera la notation :

$$Rect(\frac{t - centre}{largeur})$$

Soit les fonctions f et g définies par :

$$f(t) = 3\ Rect(t-1/2) + Rect((t-2)/2)$$
$$g(t) = Rect(t/2)$$

Trouver la convolution $f * g$.

Solution Exercice 2 :

la convolution $f(t)*g(t) = g(t)*f(t)$; on a le choix de déplacer n'importe quelle fonction par rapport à l'autre. Il est plus évident de déplacer $g(t)$ par rapport à $f(t)$. Le produit $g(t-\tau).f(\tau)$ est nul *pour* $t<-1$, donc le produit de convolution est nul sur cet intervalle.

Pour $-1<t<0$, le chevauchement se produit dans l'intervalle 0 à $t+1$. Dans cet intervalle, la fonction $g(t-\tau)=1$ et la fonction $f(\tau)=3$, le produit de convolution est :

$$\int_0^{t+1} 3d\tau = 3[t]_0^{t+1} = 3(t+1)$$

Pour $0<t<1$, le chevauchement se produit aussi dans l'intervalle 0 à $t+1$. Dans cet intervalle, la fonction $g(t-\tau)=1$, mais la fonction $f(\tau)$ est définie différemment sur deux parties de l'intervalle de chevauchement : $f(\tau) = 3$ pour $0<\tau<1$ et $=1$ pour $1< \tau<t+1$.
donc le produit simple doit être évalué aussi par intervalle et le produit de convolution est par conséquence somme de deux intégrales :

$$\int_0^1 3d\tau + \int_1^{t+1} 1d\tau = 3 + (t+1-1) = 3+t$$

Pour $1<t<2$ le chevauchement se produit dans l'intervalle $t-1$ à $t+1$. Dans cet intervalle, la fonction $g(t-\tau)=1$, mais la fonction $f(\tau)$ est définie différemment sur deux parties de l'intervalle de chevauchement donc le produit simple doit être évalué aussi par intervalle et le produit de convolution est par conséquence somme de deux intégrales :

$$\int_{t-1}^1 3d\tau + \int_1^{t+1} 1d\tau = 3(1-(t-1)) + (t+1-1) = 3(2-t) + t = 6-2t$$

Pour $2<t<4$, le chevauchement se produit dans l'intervalle $t-1$ à 3. Dans cet intervalle, les fonctions f et g valent 1.
Le produit de convolution est :

$$\int_{t-1}^3 1d\tau = 3-(t-1) = 4-t$$

Le produit est nul pour $t>4$, donc le produit de convolution est nul sur cet intervalle.
Enfin, le produit de convolution est :
0 pour $t<-1$
$3(t+1)$ pour $-1<t<0$
$3+t$ pour $0<t<1$
$6-2t$ pour $1<t<2$
$4-t$ pour $2<t<4$
0 pour $t>1$

d'où la représentation graphique de la convolution.

Exercice 3 :

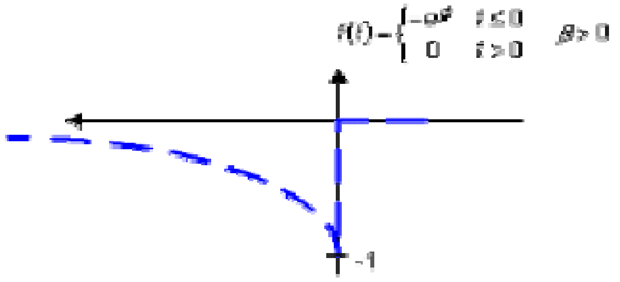
Soit les fonctions f et g définies par :

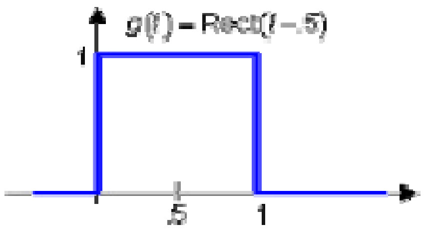
$$f(t) = \begin{cases} -e^{\beta t} \text{ pour } t \le 0 \\ 0 \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$

$$g(t) = Rect(t - 1/2)$$

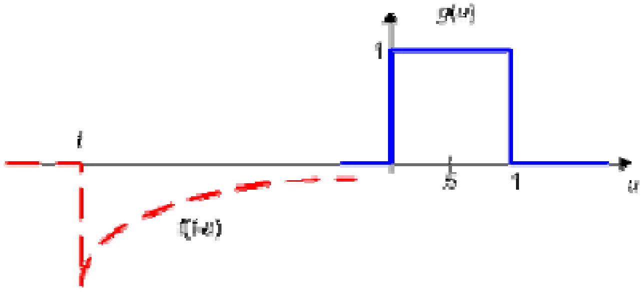
Représenter f et g puis donner les expressions analytiques de la convolution dans les différentes régions de définition.

Solution Exercice 3





Prenons l'exponentielle pour faire le déplacement :

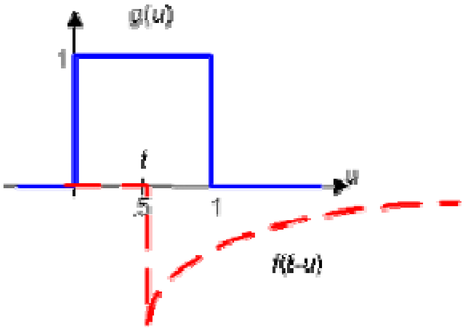


Il y a trois régions de définition pour la convolution. Pour t<0, l'exponentielle recouvre tout le rectangle. L'intégration couvre 0<u<1 où le rectangle vaut 1, et où $f(t\text{-}u)$ est égale à $-e^{\beta t}e^{-\beta u}$.

Dans cette région de définition,

$$f*g=\int_0^1 -e^{\beta t}e^{-\beta u}du=-e^{\beta t}\left[\frac{e^{-\beta u}}{-\beta}\right]_0^1=\frac{e^{\beta t}}{\beta}(e^{-\beta}-1)$$

Pour 0<t<1, l'exponentielle couvre partiellement le rectangle :



L'intégrale sera donc de t à 1 pour cette région :

$$f*g=\int_t^1 -e^{\beta t}e^{-\beta u}du=-e^{\beta t}\left[\frac{e^{-\beta u}}{\beta}\right]_t^1=\frac{e^{\beta t}}{\beta}(e^{-\beta}-e^{-\beta t})=\frac{e^{-\beta}e^{\beta t}-1}{\beta}$$

Quant t>1, il n'y a pas de recouvrement entre $f(t\text{-}u)$ et $g(u)$, donc la convolution est nulle.

Exercice 4 :

1) Montrer que l'opération de moyenne mobile (ou glissante) est une convolution avec la fonction rectangulaire.
2) Exprimer la réponse impulsionnelle correspondante.

Solution Exercice 4

Solution

1)

$$s(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}e(\tau)d\tau=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\text{rect}\left[\frac{\tau-t-T/2}{T}\right]e(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)e(\tau)d\tau$$

2)

$$h(t)=\frac{1}{T}\text{rect}\left[\frac{t+T/2}{T}\right]$$

Exercice 5 :

1) Déterminer la réponse indicielle (réponse à un signal échelon de Heaviside) d'un circuit RC dont la réponse impulsionnelle est définie par :

$$h(t)=\frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

avec $t \geq 0$ (0 pour $t<0$).

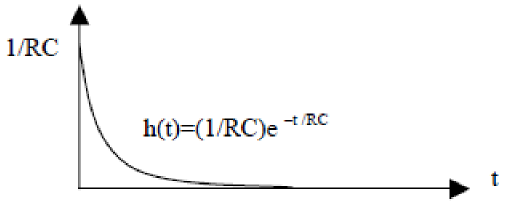
2) Représenter cette réponse impulsionnelle ainsi que la réponse du circuit.

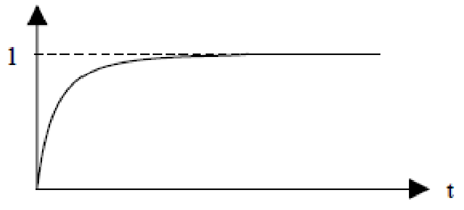
Solution Exercice 5

1) Cette réponse est définie par :

$$\begin{aligned}
S(u(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-(t-\tau)/RC}d\tau \\
&= \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-t/RC}e^{\tau/RC}d\tau \\
&= \frac{e^{-t/RC}}{RC}\int_0^t e^{\tau/RC}d\tau \\
&= e^{-t/RC}\left[e^{\tau/RC}\right]_0^t \\
&= e^{-t/RC}\left[e^{t/RC}-1\right] \\
&= 1-e^{-t/RC}
\end{aligned}$$

2)





Exercice 6 :

Calculer la réponse d'un circuit RC à une rampe de pente 1, à partir de sa réponse impulsionnelle.

Solution Exercice 6

$$y(t)=\int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_0^t \tau.h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t)=\int_0^t \tau.h(t-\tau)d\tau=\frac{1}{RC}\int_0^t \tau.e^{-(t-\tau)/RC}d\tau=\frac{1}{RC}e^{-t/RC}\int_0^t \tau.e^{\tau/RC}d\tau$$

On doit utiliser l'intégration par parties :

$$(uv)'=u'v+uv' \quad \leftrightarrow \quad uv=\int u'v+\int uv' \quad \leftrightarrow \quad \int u'v=uv-\int uv'$$

En prenant u'=$e^{\tau/RC}$ et v=τ, on a : u=RC$e^{\tau/RC}$ et v'=1. Donc :

$$y(t)=\frac{1}{RC}e^{-t/RC}\left\{RC\left[\tau e^{\tau/RC}\right]_0^t-RC\int_0^t e^{\tau/RC}d\tau\right\}=e^{-t/RC}\left\{\left[\tau e^{\tau/RC}\right]_0^t-\int_0^t e^{\tau/RC}d\tau\right\}$$

$$=e^{-t/RC}\left\{\left[\tau e^{\tau/RC}\right]_0^t-RC\left[e^{\tau/RC}\right]_0^t\right\}=e^{-t/RC}\left\{\left[te^{t/RC}\right]-RC\left[e^{t/RC}-1\right]\right\}$$

$$=t-RC(1-e^{-t/RC})$$

Exercice 7 :

Calculer f*g avec :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } -1\le x<3\\ 0 & \textit{ailleurs}\end{cases} \quad \text{et} \quad g(x)=\begin{cases}x/2 & \text{si } 0\le x\le 2\\ 0 & \textit{ailleurs}\end{cases}$$

Solution Exercice 7 :

a) **La première étape :**

On écrit la définition du produit de convolution, à savoir :

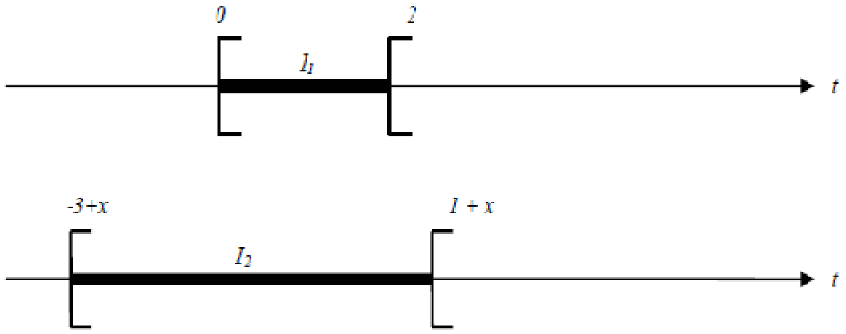
$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t).f(x-t)$$

b) **La deuxième étape :**

On s'intéresse aux différents intervalles :

- $g(t)=\frac{t}{2}$ si $0\leq t\leq 2$ donc $t\in[0;2]=I_1$
- $f(x-t)=1$ si $-1\leq x-t\leq 3 \Leftrightarrow -1-x\leq -t\leq 3-x \Leftrightarrow x+1\geq t\geq -3+x \Leftrightarrow -3+x\leq t\leq x+1$ donc $t\in[-3+x;1+x]=I_2$

Ensuite, pour mieux cerner la chose, mieux vaut user d'un petit croquis :

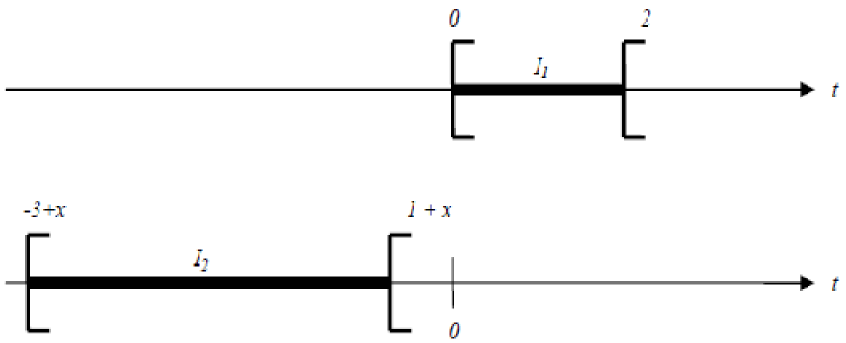


c) **On applique la définition du produit de convolution :**

Définition du produit de convolution : $(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t).f(x-t)=\int_{I_1\cap I_2} 1.\frac{t}{2}dt$

Hors, résoudre un tel calcul s'avère assez complexe. Usons de stratégie, et découpons en plusieurs cas, et procédons aux intégrations, au cas par cas :

Cas 1 :

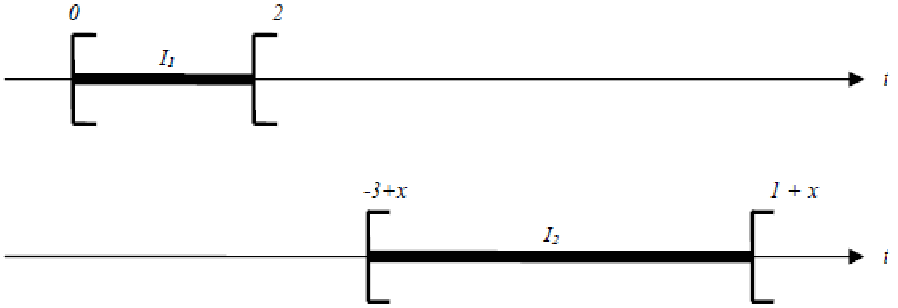


On remarque que les deux intervalles ne se recouvrent pas, donc quand on va multiplier la fonction f par la fonction g, on va trouver zéro.

Dans un langage plus mathématique, cela serait :

$$\text{Si } 1+x<0, \text{ alors } I_1 \cap I_2 = \varnothing, \text{ donc } (f*g)(x)=0$$

Cas 2 :

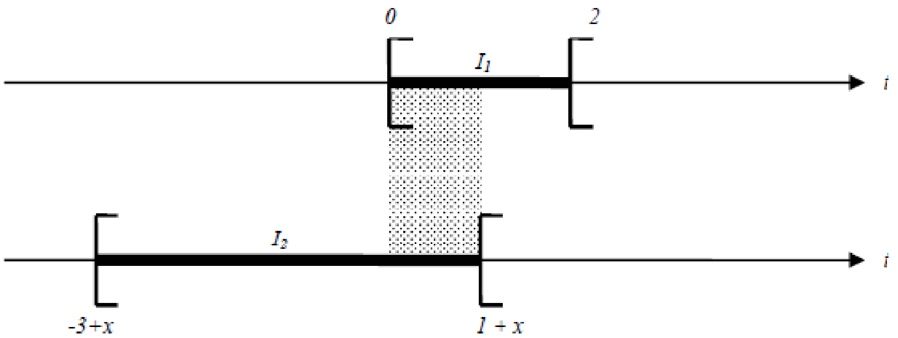


Il n'y a pas non plus de recouvrement dans cette situation. Donc :

$$\text{Si } -3+x>2, \text{ alors } I_1 \cap I_2 = \varnothing, \text{ donc } (f*g)(x)=0$$

Maintenant que nous avons vu les deux cas les plus défavorables (et aussi les plus simples…), passons à la suite.

Cas 3 :



Cette fois-ci il y a recouvrement, sur une partie des deux intervalles.

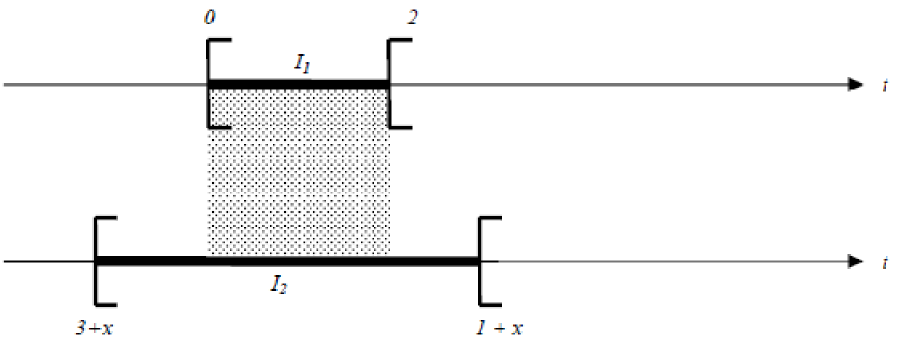
$$\text{Si } 0<1+x<2, \text{ alors } I_1 \cap I_2 = [0;1+x]$$

On peut donc déterminer la valeur du produit de convolution, à partir de sa définition élémentaire :

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t).f(x-t) = \int_{I_1 \cap I_2} 1.\frac{t}{2}.dt = \int_0^{1+x} \frac{t}{2}.dt = \frac{1}{2}\int_0^{1+x} t.dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{1+x} = \frac{1}{4}.[t^2]_0^{1+x}$$

$$\Rightarrow (f*g)(x) = \frac{1}{4}.[t^2]_0^{1+x} = \frac{1}{4}\{(1+x)^2-0\} = \frac{(1+x)^2}{4}$$

Cas 4 :



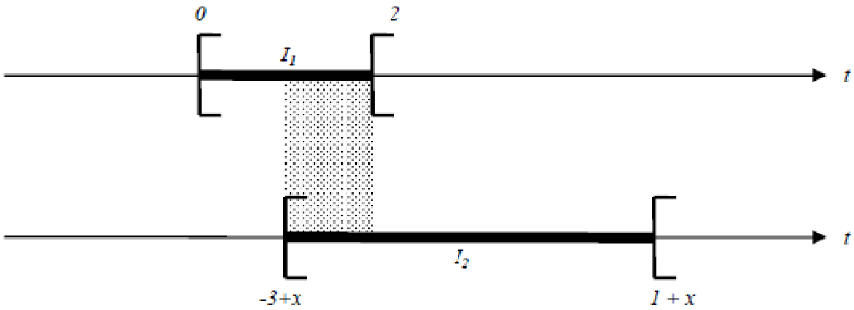
Une fois encore, il y a bien recouvrement, donc nous allons procéder comme au cas précédent.

$$\text{Si } -3+x<0 \text{ et } 1+x>2, \text{ alors } I_1 \cap I_2 = [0;2]$$

Déterminons la valeur du produit de convolution :

$$(f*g)(x) = \frac{1}{4}.[t^2]_0^2 = \frac{1}{4}\{2^2-0^2\} = \frac{4-0}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Cas 5 :



Il y a toujours et encore recouvrement :

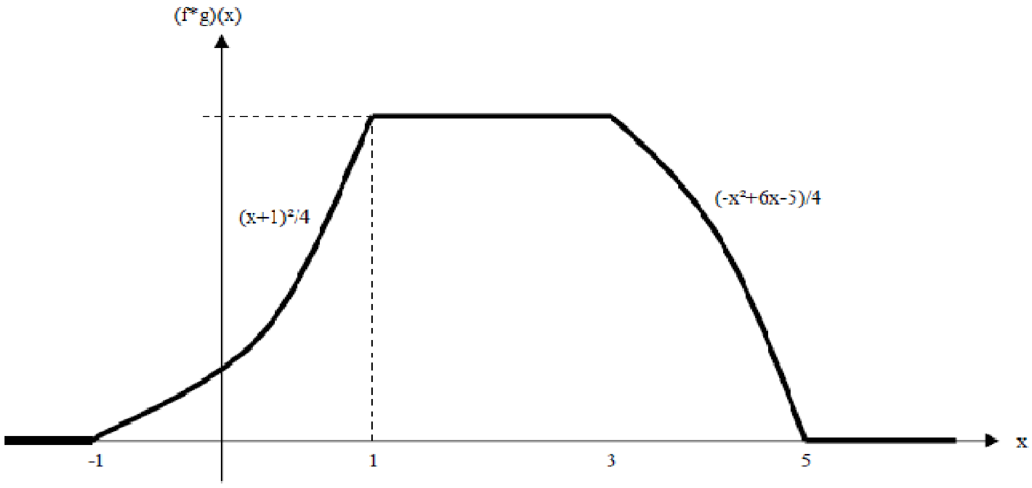
$$\text{Si } -3+x>0, \text{ alors } I_1 \cap I_2 = [-3+x;2]$$

Déterminons la valeur du produit de convolution :

$$(f*g)(x) = \frac{1}{4}.\left[t^2\right]_{-3+x}^{2} = \frac{1}{4}\left\{2^2-(-3+x)^2\right\} = \frac{1}{4}\left\{4-(x-3)^2\right\} = \frac{1}{4}.\left\{4-\left\{x^2+9-6x\right\}\right\} = \frac{1}{4}\left\{4-x^2-9+6x\right\} = \frac{-x^2+6x-5}{4}$$

d) On résume tout !

Maintenant que nous avons déterminé les diverses valeurs du produit de convolution, sur les divers intervalles, il est envisageable de tracer (par morceaux), la courbe représentative :



Exercice 8 (corrélation) :

1) Calculer la fonction d'autocorrélation d'un signal porte défini par

$$x(t) = \text{rect}[(t - T/2)/T]$$

2) Conclure sur les propriétés de la corrélation utiles pour la mesure de ressemblance.

3) Déterminer l'énergie de ce signal à partir de sa fonction d'autocorrélation.

4) Calculer la fonction d'autocorrélation du signal carré obtenu par répétition de la fonction porte à tous les instants kT', avec T'=2T et k entier.

5) Montrer quand dans ce dernier cas, la borne inférieure de l'intégrale peut être différente de la valeur choisie dans la question précédente.

Solution Exercice 8 :

1) La fonction possède une largeur égale à T, une amplitude égale à 1 et est centrée sur T/2.

La simplification de cette intégrale va se ramener à déterminer les bornes d'intégration, selon différents cas, car la fonction *rect* va être remplacée par 1. On peut distinguer 4 cas :

- 1^{er} cas : si $T+\tau<0$, soit $\tau<-T$, le produit des 2 fonctions est nul, donc la fonction d'autocorrélation également.
- 2^{e} cas : $-T<\tau<0$: l'intervalle de valeurs de τ pour lequel le produit n'est pas nul est $[0, \tau+T]$. Sur cet invervalle, ce produit vaut 1. On a donc :

$$C_{xx}(\tau) = \int_{t=0}^{\tau+T} 1.dt = [t]_0^{\tau+T} = \tau + T$$

- 3^{e} cas : $0<\tau<T$: l'intervalle sur lequel le produit n'est pas nul est $[\tau, T]$. Sur cet invervalle, ce produit vaut 1. On a donc :

$$C_{xx}(\tau) = \int_{t=\tau}^{T} 1.dt = [t]_\tau^{T} = T - \tau$$

- 4^{e} cas : $\tau>T$:le produit des fonctions est à nouveau nul.

2) La fonction d'autocorrélation est maximale quand la coïncidence entre le signal et lui-même est maximale. Elle traduit donc la ressemblance entre les 2 signaux, permettant de déterminer le décalage pour lequel cette ressemblance est maximale.

3) On utilise directement la propriété selon laquelle la fonction d'autocorrélation en 0 est égale à l'énergie du signal, soit ici T.

4) Pour un signal périodique, l'expression de la fonction d'autocorrélation est :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} x(t).x(t-\tau)dt$$

Ici, T représente la période du signal, égale à 2 fois la durée de la fonction porte. On prendra T' pour ne pas confondre avec le T désignant la durée du signal porte.

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T'}\int_{t=0}^{T'} x(t).x(t-\tau)dt$$

Pour déterminer cette fonction, on peut utiliser directement les résultats du signal porte. En effet, la fonction obtenue était comprise entre –T et +T, et nulle en dehors de cet intervalle. Ici, la même fonction va réapparaître après une période du signal et ainsi de suite, le décalage augmentant (τ) indéfiniment. De même pour $\tau<0$. La fonction d'autocorrélation est donc pédiodique, de période égale à celle du signal.

5) On peut remarquer graphiquement que si l'on avait effectué l'intégration sur l'intervalle [-T/2, T/2] plutôt que [0,T], le résultat aurait été le même.

Exercice 9 (corrélation) :

Soit un signal défini par :

$$x(t) = \frac{A}{T}t\left[u(t) - u(t-T)\right]$$

1) Représenter ce signal.

2) Calculer sa fonction d'autocorrélation, et la représenter.

3) Déterminer son énergie à partir de sa fonction d'autocorrélation.

Solution Exercice 9 (corrélation) :

1) On peut également exprimer le signal sous la forme :

$$x(t)=\begin{cases}\frac{A}{T}t & \text{pour} \quad t\in[0,T]\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

La forme de ce signal est une dent de scie de largeur T : en t=0, sa valeur est 0 ; en T, elle vaut A.

2) Sa fonction d'autocorrélation est définie par :

$$C_{xx}(\tau)=\int_{t=-\infty}^{+\infty}x(t).x(t-\tau)dt=\int_{t=-\infty}^{+\infty}\frac{A}{T}t.[u(t)-u(t-T)].\frac{A}{T}(t-\tau).[u(t-\tau)-u(t-\tau-T)]dt$$

Les différents cas à étudier sont les mêmes qu'avec un signal porte. Les 2 seuls cas pour lesquels le produit des fonctions n'est pas nul sont :

- 2e cas : $-T<\tau<0$: l'intervalle de valeurs de τ pour lequel le produit n'est pas nul est $[0, \tau+T]$. On a donc :

$$C_{xx}(\tau)=\int_{t=0}^{\tau+T}\frac{A}{T}t.\frac{A}{T}(t-\tau).dt$$

$$=\frac{A^2}{T^2}\int_{t=0}^{\tau+T}\left(t^2-t\tau\right)dt=\frac{A^2}{T^2}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\tau\right]_0^{\tau+T}=\frac{A^2}{T^2}\left(\frac{(\tau+T)^3}{3}-\frac{(\tau+T)^2}{2}\tau\right)$$

$$=\frac{A^2}{6T^2}\left(2(\tau+T)^3-3(\tau+T)^2\tau\right)=\frac{A^2}{6T^2}\left(2(\tau+T)(\tau^2+2\tau T+T^2)-3(\tau^2+2\tau T+T^2)\tau\right)$$

$$=\frac{A^2}{6T^2}\left(2(\tau^3+2\tau^2T+\tau T^2+\tau^2T+2\tau T^2+T^3)-3(\tau^3+2\tau^2T+\tau T^2)\right)$$

$$=\frac{A^2}{6T^2}\left(2(\tau^3+3\tau^2T+3\tau T^2+T^3)-3(\tau^3+2\tau^2T+\tau T^2)\right)$$

$$=\frac{A^2}{6T^2}\left(-\tau^3+3\tau T^2+2T^3\right)$$

- 3e cas : $0<\tau<T$: l'intervalle sur lequel le produit n'est pas nul est $[\tau, T]$. On a donc :

$$C_{xx}(\tau)=\int_{t=\tau}^{T}\frac{A}{T}t.\frac{A}{T}(t-\tau).dt$$

$$=\frac{A^2}{T^2}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\tau\right]_\tau^T=\frac{A^2}{T^2}\left(\frac{T^3}{3}-\frac{T^2}{2}\tau-\frac{\tau^3}{3}+\frac{\tau^3}{2}\right)=\frac{A^2}{6T^2}\left(2T^3-3T^2\tau+\tau^3\right)$$

On remarque que l'on a le même résultat que dans le cas précédent, mais avec un changement de signe pour τ. On peut donc écrire ces 2 résultats sous la forme d'un seul :

$$C_{xx}(\tau)=\begin{cases}\frac{A^2}{6T^2}\left(2T^3-3T^2|\tau|+|\tau|^3\right) & \text{si} \quad |\tau|<0\\ 0 \quad \text{si} \quad |\tau|>0\end{cases}$$

Cette fonction est un polynôme d'ordre 3. Elle est symétrique par rapport à 0. Quand $\tau\to 0$ par valeurs négatives, la fonction se comporte comme $a\tau+b$.

3) L'énergie du signal est la valeur de sa fonction d'autocorrélation pour $\tau=0$. On remplace donc τ par 0 dans l'expression précédente. On obtient $C_{xx}(\tau)=\frac{A^2T}{3}$.

Exercice 10 (corrélation) :

Calculer la fonction d'autocorrélation du signal sinusoïdal.

Solution Exercice 10 (corrélation) :

Dans le cas simplifié d'une amplitude unité et d'une phase nulle, la fonction sinusoïdale est définie par :

$$s(t) = \sin(\omega_0 t)$$

pour une pulsation ω_0.

On applique l'expression de l'autocorrélation :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} x(t).x(t-\tau)dt = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \sin(\omega_0 t).\sin(\omega_0(t-\tau))dt$$

On utilise la formule de trigonométrie :

$$\sin(a).\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

donc :

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{t=0}^{T}\cos(\omega_0\tau)dt - \frac{1}{2T}\int_{t=0}^{T}\cos(\omega_0(2t-\tau))dt$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{\cos(\omega_0\tau)}{2T}\int_{t=0}^{T} 1dt - \frac{1}{2T}\int_{t=0}^{T}\cos(\omega_0(2t-\tau))dt$$

$$-\frac{\cos(\omega_0\tau)}{2} + \frac{1}{2\omega_0 T}\left[\sin(\omega_0(2T-\tau)) - \sin(-\omega_0\tau)\right]$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{\cos(\omega_0\tau)}{2}$$

Exercice 11 (corrélation discrète) :

1) On considère le signal long suivant, sous la forme d'une séquence $\{x_n\}$, où n représente les indices des éléments dans la séquence, commençant à 0 :

```
signal long :    1   0   1   2   1   2   2   0   0
```

Et le signal court sous la forme d'une séquence $\{y_n\}$:

```
signal court :   0   1   2
```

On cherche à détecter la présence du signal court dans le signal long. Pour cela, on définit le produit de corrélation de la manière suivante :

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_{i+k}.y_i$$

où N est le nombre d'éléments du signal court : N=3.

1) Calculer le produit de convolution pour k=0, k=1 et k=4.

2) Par interprétation de ces résultats, indiquer si la détection de la ressemblance entre les 2 signaux est bien effectuée de cette manière.

3) Recommencer avec les versions centrées des signaux (pour chacun, la moyenne de ses éléments est retranchée de chaque élément) :

```
signal long :    0  -1   0   1   0   1   1  -1  -1
signal long :   -1   0   1
```

4) Même question que 2) pour les résultats du 3).

5) Conclure sur l'utilité de centrer les signaux pour rechercher des motifs dans un signal par corrélation, et ré-écrire l'expression de la fonction de corrélation prenant en compte ce centrage.

Solution Exercice 11 (corrélation discrète) :

1) $C_{xy}(0)=2$; $C_{xy}(1)=5$; $C_{xy}(4)=6$

2) Ces calculs ne permettent pas de détecter la ressemblance maximale, car la valeur maximale ne correspond pas à celle-ci.

3) $C_{xy}(0)=0$; $C_{xy}(1)=2$; $C_{xy}(4)=1$

4) Ici, la valeur maximale correspond à la ressemblance maximale entre le signal court et la zone comparée du signal long.

5) Le centrage des signaux permet donc de transformer ce calcul en un moyen de détecter la ressemblance entre 2 signaux. On peut ré-écrire la fonction de corrélation de la façon suivante :

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+k} - \bar{x}).(y_i - \bar{y})$$

où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ représentent respectivement les moyennes des séquences $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$.