**EXERCICES AVEC SOLUTIONS SUR LES VARIABLES ALEATOIRE**

**DISCRETES ET CONTINUES**

**Exercice 1**

Soit les variables discrètes suivantes (voir les tableaux ci-dessous). Représentent elles des variables aléatoires disrètes? Justfifiez vos réponses





**Solution Exercice 1**

Le premier tableau ne peut pas presenter une variable aléatoire car la somme de toutes les probabilités est supérieure à 1

Le 2ème tableau présente des probabilitsé negatives donc ce n’est pas une variable aléatoire

Le 3ème aussi n’est pas une variable aléatoire car la somme de toutes les probabilités est inférieure à 1

Le 4ème non plus car des probabilités negatives

Le 5ème non plus car la somme des probabilités est inférieure à 1

Le 6ème tableau représente bien une variable aléatoire car la somme des probabilités est égale à 1 et toutes les probabilités sont positives

**Exercice 2**

Soit deux variables aléatoires discrètes données ci-dessous





Tracez pour chacune sa densité de probabilité

Tracez pour chacune sa fonction de repartition

Calculez pour la première va, *P*(80), *P*(*X*>80) et *P*(*X*≤80).

Calculez pour la seconde va, *P*(18), *P*(*X*>18) et *P*(*X*≤18).

Calculez pour chacune E(X), VAR(X) et son écart type

**Solution Exercice 2**

Pour la première va nous avons P(80)=0.4; *P*(*X*>80)=0.1, *P*(*X*≤80)=0.9

E(X)=79.15, *σ*2=1.5275, *σ*=1.2359

Pour la deuxième va nous avons P(18)=0.25; *P*(*X*>18)=0.53, *P*(*X*≤18)=0.47

E(X)=……., *σ*2=……., *σ*=……..

**Exercice 3**

Parmi les cas suivants, déterminer si la variable aléatoire X est ou non une variable aléatoire binomiale . Si tel est le cas, donnez les valeurs de n et p. Si non, expliquer pourquoi.

X est le nombre de points sur la face supérieure du dé juste qui est lancé.

X est le nombre de cœurs dans une main de cinq cartes tirées (sans remplacement) à partir d'un jeu de cartes ordinaire bien mélangé.

X est le nombre de pièces défectueuses dans un échantillon de dix pièces sélectionnées au hasard issues d'un processus de fabrication dans lequel 0,02% de toutes les pièces sont défectueuses.

X est le nombre de fois où on obtient un nombre pair en six lancers du dé.

X est le nombre de dés qui montrent un nombre pair lorsque six dés sont lancés à la fois.

**Solution Exercice 3**

pas binomial; pas de succès / échec.

pas binomial; les essais ne sont pas indépendants.

binomiale; n = 10, p = 0,0002

binomiale; n = 6, p = 0,5

binomiale; n = 6, p = 0,5

**Exercice 4**

X est une variable aléatoire binomiale avec les paramètres n = 12 et p = 0,82. Calculez :

*P*(11), *P*(9), *P*(0) et *P*(13)

**Solution exercice 4**

*P*(11)=0.2434, *P*(9)=0.2151, P(0)=0.1812≈0 et P(13)= 0

**Exercice 5**

Même chose avec *n*=16 et *p*=0.74.

*P*(14), *P*(4), *P*(0) et *P*(20)

**Exercice 6**

Un concessionnaire de voitures vend 20 voitures chaque mois. Dix pour cent de tous les acheteurs achètent une garantie prolongée. Soit X le nombre des 20 prochains acheteurs qui le font.

Vérifiez que X satisfait aux conditions d'une variable aléatoire binomiale et trouvez n et p . Trouvez la probabilité que X soit nul.

Trouvez la probabilité que X soit deux, trois ou quatre.

Trouvez la probabilité que X soit au moins cinq.

**Solution Exercice 6**

*n*=20,*p*=0.1, P(0)=0.1216, P(2)+P(3)+P(4)=0.5651, P(X≥ 5)=0.0432

**Exercice 7**

Un relecteur professionnel a 98% de chances de détecter une erreur dans un travail écrit (autre que des fautes d'orthographe, des mots doubles et des erreurs similaires détectées par la machine). Une œuvre contient quatre erreurs.

Trouvez la probabilité que le relecteur en oublie au moins un.

Montrez que deux de ces relecteurs travaillant indépendamment ont 99,96% de chances de détecter une erreur dans un travail écrit.

Trouvez la probabilité que deux de ces relecteurs travaillant indépendamment rateront au moins une erreur dans un travail qui contient quatre erreurs.

**Solution Exercice 7**

P(X≥1)=0.0776

0.9996

0.0016

**Exercice 8**

Un QCM comporte 20 questions ; il y a quatre choix pour chaque question. Un étudiant devine la réponse à chaque question.

Trouvez la chance qu'il devine correctement entre quatre et sept fois.

Trouvez le score minimum que l'instructeur peut définir pour que la probabilité qu'un élève réussisse simplement en devinant est de 20% ou moins.

**Exercice 9**

Des biologistes doivent déterminer lesquels des 600 adultes ont une maladie qui affecte 2% de la population adulte. Un échantillon de sang est prélevé sur chacun des individus.

Montrer que le nombre attendu d'individus malades dans le groupe de 600 est de 12 individus. Au lieu de tester les 600 échantillons de sang pour trouver les 12 individus malades attendus, les biologistes regroupent les échantillons en 60 groupes de 10 chacun, mélangent un peu de sang de chacun des 10 échantillons de chaque groupe et testent chacun des 60 mélanges. Montrez que la probabilité qu'un tel mélange contienne le sang d'au moins une personne malade, donc un test positif, est d'environ 0,18 Sur la base du résultat en (b), montrez que le nombre attendu de mélanges dont le test est positif est d'environ 11 (en supposant qu'en effet 11 des 60 mélanges testent positifs, alors nous savons qu'aucune des 490 personnes dont le sang était dans les 49 autres) les échantillons qui ont été testés négatifs ont la maladie. Nous avons éliminé 490 personnes de notre recherche en effectuant seulement 60 tests.)

**Exercice 10**

Quels types de distributions représentent ces densités de probabilités ?







**Solution Exercice 10**

La première est une distribution continue uniforme

La deuxième est une distribution continue exponentielle

La troisième est une distribution continue normale centrée réduite

**Exercice 11**

Pour les distributions continues suivantes (représentées ci-dessous) calculez la probabilité limitée par la couleur sombre (violet)

Ensuite calculez E(X), VAR(X) pour chaque cas







**Solution Exercice 11**

La première est donnée par P(6<X<8)=2/9

La seconde est donnée par P(X<5)=5/8

La troisième est donnée par P(2.5<X<5.5)= 3/10

**Exercice 12**

La figure suivante montre les courbes de densité de probabilité de trois variables aléatoires continues notées respectivement XA, XB et XC. Leurs écarts types (en désordre) sont de 20, 5 et 10. Utilisez la figure pour identifier les valeurs des moyennes μA, μB et μC et les écarts-types σA, σB et σC des trois variables aléatoires.



**Solution Exercice 12**

μA = -60 , σA = 10

μB = 0, σB = 5

μC = 60, σC = 20

**Exercice 13**

Soit X une variable aléatoire avec fonction de densité de probabilité donnée par :



Trouvez la constante c

Trouver E(X) et Var(X)

Trouver P (X≥12)

**Solution Exercice 13**

Pour calculer c, il suffit d’utiliser la propriété d’une densité de probabilité suivante :



Ce qui nous permet de déduire que c=2/3

Pour calculer l’espérance mathématique, il suffit d’appliquer la formule :



Donc c’est une variable aléatoire centrée (moyenne statistique nulle)

Pareil pour calculer la variance, on applique sa formule



P (X≥12) est donnée par :



**Exercice 14**

Nous avons quatre distribution normales (gaussiennes) suivantes :



En sachant que ces quatre distributions normales sont (en désordre) N(-2,2), N(2,1), N(2,2) et N(-2,1)

A quel correspond chacune ?

**Solution Exercice 14**



**N(-2,1)**

**N(2,2)**

**N(2,1)**

**N(-2,2)**

**Exercice 15**

Soit une variable aléatoire Normale *X*∼*N*(−5,4). Trouvez *P*(*X*<0), *P*(−7<*X*<−3) et *P*(*X*>−3|*X*>−5).

**Solution Exercice 15**

Comme X es tune va Normale de Moyenne µ=-5 et d’écart type σ=4 alors nous pouvons écrire :





Où FX(X) est la fonction de repartition







≈ 0.32

**Exercice 16**

Pour chacun de ces deux fonctions de densité de probabilités représentées ci-dessous :



Donnez la formule de la fonction de densité de probabilité.

Estimez d’abord la valeur de la moyenne. Ensuite, calculez-lq pour évaluer l'exactitude de votre estimation.

Estimez la probabilité que la variable aléatoire correspondante se situe entre les limites de la région sombre. Ensuite, calculez la probabilité pour vérifier votre estimation.

**Solution Exercice 16**

Pour la première fonction de densité de probabilité nous avons :

****

Pour la seconde fonction de densité de probabilité nous avons :



Pour estimer la valeur Moyenne nous devons deviner où se trouve le centre de gravité de chacune de ces deux fonctions de densité de probabilité. Les suppositions raisonnables seraient «entre 3 et 4» pour la première fonction de densité de probabilité et «entre 4 et 5» pour la deuxième.

Maintenant, pour les determiner avec exactitude on doit appliquer la formule de l’espérance mathématique à savoir

**1ère fonction de densité de probabilité**



**2ème fonction de densité de probabilité**



Quant aux probabilités correspondants aux zones sombres dans les deux cas nous avons respectivement 2/9=0.222 et 5/8=0.625

**Exercice 17**

On sait que le taux de cholestérol chez les hommes de 30 ans suit une distribution normale avec une moyenne de 220 mg / dl et un écart type de 30 mg / dl. S'il y a 20000 hommes de 30 ans dans la population, combien d'entre eux ont un taux de cholestérol compris entre 210 et 240 mg / dl? Si un taux de cholestérol supérieur à 250 mg / dl peut provoquer une thrombose, combien d'entre eux sont à risque de thrombose (caillot de sang dans les veines ou artères)? Calculer le taux de cholestérol au-dessus duquel 20% des hommes ont?

**Solutions Exercice 17**

