**EXERCICES AVEC SOLUTIONS SUR LE PROCESSUS STOCHASTIQUES**

**Exercice 1**

Le schéma de principe d’un casque (écouteur) à réduction de bruit environnemental est décrit ci-dessous. Pour simplifier nous travaillerons dans le domaine spectral en utilisant que des spectres et non pas des signaux dans le domaine temporel



Nous souhaitons écouter de la musique X(f) transmise sur un haut-parleur avec une réponse inconnue H0(f), mais le signal auriculaire Y(f) est perturbé par un bruit d'environnement inconnu W(f), qui a été filtré par une réponse de canal inconnue H1(f). Nous mesurons le signal de reçu par l'oreille avec le microphone 1. Un microphone supplémentaire (mic2) capte également le signal de bruit, mais il est filtré par un filtre inconnu H2(f). Nous souhaitons concevoir un filtre G(f) tel que le signal de bruit Y est parfaitement annulé. Alors que nous concevons G(f), il n'est pas inclus dans le schéma.

(a) Quelle est la solution souhaitée pour G(f) en termes de H1(f) et H2(f)?

(b) Montrer que H2-1 (f) = |H2(f) |−2H∗2(f) .

X(f) et W(f) sont considérés comme des processus aléatoires indépendants, avec des densités spectrales de puissance SX(f ) et SW(f), respectivement.

(c) Donner des expressions pour SY(f), SV(f) et SYV(f) en termes de SX(f) et SW(f).

d) Laquelle de ces densités spectrales de puissance (croisée) pouvons-nous observer?

(e) Donner une expression pour G (f) en termes de quantités observées.

**Solution Exercice 1**

(a)



(b)



Effectivement cette expression représente bien l’inverse de car :



(c)



(d)

En utilisant les signaux du microphone, nous pouvons observer Y(f) et V(f), et estimer SY(f), SV(f) et SYV(f). Vraisemblablement, nous connaissons également le signal d'entrée X(f) et connaissons SX(f). Mais ce n'est pas utilisé ici. En réalité, X (f) est également perturbé par un filtre inconnu.

(e)



Mais dans la pratique, il y a plusieurs limites:

une certaine partie du signal X(f) peut être perdue dans V(f) provoquant l'annulation du signal désiré,

H2(f) (réponse fréquentielle) peut avoir un zéro à une certaine fréquence, empêchant l'inversion,

H2(p) (fonction de transfert en p) peut avoir des zéros dans le demi-plan gauche du plan p qui vont devenir des pôles instables lorsque nous inversons le canal.

**Exercice 2**

Soit une séquence aléatoire discrète Xn composée par la somme d’une constante discrète égale à 2, et d’un un bruit Nn i.i.d. (**indépendantes et identiquement distribuées)** de moyenne nulle et de Var[Nn] = σ2. La séquence aléatoire Yn est obtenue en filtrant Xn, à l’aide d’un SLIT discret de réponse impulsionnelle h(n) donnée par :



(a) Montrer que la séquence d'autocorrélation de Xn est donnée par RX[k] = 4 + σ2δ[k].

(b) Trouvez E[Yn].

(c) Trouver l'autocorrélation RY[n, k] et l'auto-covariance CY[n, k].

(d) Yn est il i.i.d.? Yn est-il WSS (stationnaire au sens large)? Expliquez

(e) Trouvez la fonction d’intercorrélation RXY[n, k] et la fonction d’intercovariance CXY[n,k].

(f) Xn et Yn sont-ils conjointement stationnaires au sens large? Justifiez

(g) Calculez la puissance moyenne de Yn.

(h) Si, de plus, Nn est distribué gaussien, alors Yn est-il gaussien? Justifiez

**Solution Exercice 2**

(a) Comme Xn est iid (**indépendantes et identiquement distribuées)** alors nous avons :



En effet Xn est composé d’une constante 2 qui deviendra sa valeur moyenne et d’un bruit centré (moyenne nulle) iid qui aura une fonction d’autocorrélation représentée par un Dirac. Comme la fonction d’autocovariance de l’ensemble de Xn ne tient pas compte de la composante continue elle sera égale à celle du bruit Nn.

Mais par contre la fonction d’autocorrélation de Xn tient compte de la composante continue 2, ce qui nous donne :



(b) Le filtre possède une réponse impulsionnelle égale à h(n)={1, -0.5}

Ce qui nous permet alors d’écrire la sortie Yn en fonction de Xn en tenant compte de la convolution comme représentation mathématique de ce filtre



Ainsi, le calcul de E[Yn] sera donné par :



(b)



(c) Yn n’est pas i.i.d. : CY[n, k] montre clairement que Yn n'est pas indépendant de Yn−1.

Yn est WSS car E[Yn] est indépendant de n et CY[n, k] est indépendant de n.

(e)



(f) Oui, car Xn et Yn sont chacun WSS, et CXY[n,k] ne dépend que de k.

(g) La puissance moyenne de Yn est :



(h) Oui car la somme des variables aléatoires gaussiennes est à nouveau une variable aléatoire gaussienne.

**Exercice 3**

Supposons que X(t) est un processus de bruit gaussien blanc avec une variance σ2 = 4. Le signal est filtré par un SLIT avec réponse impulsionnelle donnée ci-dessous :



Le signal de sortie est noté Y (t).

(a) Déterminez E[Y(t)].

(b) Déterminez la densité spectrale de puissance d'entrée SX(f).

(c) Déterminer la densité spectrale de puissance de sortie SY(f) et en dessiner un tracé (indiquer les valeurs sur les axes).

(d) Déterminer la fonction d'autocorrélation de la sortie, RY(τ).

(e) Déterminez la puissance de sortie moyenne, E[Y2(t)].

(f) Déterminez P [Y(t)> 0,2].

(g) Soit Z(t) = Y(t − 3). Comment la densité spectrale de puissance de Z(t) est-elle liée à celle de Y(t).

**Remarque:** Vous pouvez exprimer votre réponse pour (f) en termes de Φ(z) ou Q(z).

**Solution Exercice 3**

(a)



(b)



(c)







(d)



(e)



(f)





(g)







**Exercice 4**

Supposons que X (t) est un processus aléatoire stationnaire à sens large (WSS) avec la fonction d'autocorrélation RX (τ).

(a) Y(t) = X(at) + b est-il WSS, pour des scalaires arbitraires a, b? Si tel est le cas, spécifiez RY(τ).

(b) Y(t) = X (t − 2) est-il WSS? Si tel est le cas, spécifiez RY(τ).

(c) Yn = X(nT) est-il une séquence WSS, pour T> 0? Si tel est le cas, spécifiez RY[k].

(d) Supposons que RX(τ) = δ (τ) −1. Est-ce une fonction d'autocorrélation valide de X(t)? Justifiez

(e) Donner un exemple de séquence aléatoire Xn, qui a RX[k] = (−1)k + δ[k] comme séquence d'autocorrélation.

Remarque: une réponse oui / non sans motivation ne donnera pas lieu à des points.

**Solution Exercice 4**

1.

Oui: Soit μX = E [X(t)] (une constante, à cause de WSS), alors E[Y(t)] = μX + b est constant, et :



Ne dépend pas de t

(b)

Oui μY = E [Y(t)] = μX une constante, et :



Ne dépend pas de t

(c)

Oui ; E[Yn] =μX est constant



Ne dépend pas de n

Ce n'est en général pas simple à déterminer. Il est clairement indépendant du temps t. Cependant, la densité spectrale de puissance correspondante serait SX(f) = 1 − δ (f) et ce n'est pas positif pour tout f (à savoir, pour f = 0, elle est égale à -∞). Ce n'est donc pas une fonction d'autocorrélation valide.

(e) Xn = (-1)nA + Nk, où A est une variable aléatoire avec E[A2] = 1, et Nk est une séquence de bruit blanc (variance unitaire).

Remarque: votre exemple doit être une séquence aléatoire, sinon vous ne pouvez pas déterminer RX[k].

**Exercice 5**

Soit le processus stochastique X(t)



où A est une variable aléatoire avec la distribution uniforme suivante :



(a) Donnez la valeur de la constante c.

(b) Tracez trois différentes réalisations possibles de ce processus.

(c) Calculez la valeur attendue de process X(t).

(d) Calculer la fonction d'autocorrélation RX(t, τ).

(e) Argumenter pour savoir si ce processus est ou non stationnaire.

**Solution Exercice 5**

(a)

La fonction de densité de probabilité de la va A est uniforme (constante égale à c entre 0 à 3) et son intégrale doit être égale à un (somme ou intégrale de toutes les probabilités = à 1). Ainsi, c = 1/3

(b)



(c)



(g)

Non stationnaire car la moyenne et la fonction d’autocorrélation dépendent du temps t.

**Exercice 6**

Etant donné est le processus stochastique X (t) = A | t | avec une variable aléatoire A uniformément distribuée dans l'intervalle (continu) [2,4].

(a) Esquissez trois réalisations différentes du processus X (t).

(b) Calculer la fonction de distribution cumulative (fonction de répartition) FX(t)(x), ainsi que la fonction de densité de probabilité fX(t)(x) pour t≠0.

(c) Calculez la valeur attendue E[X (t)].

(d) Calculer la fonction d'autocorrélation R(t, τ).

(e) Argumenter pour savoir si le processus X(t) est stationnaire ou non, et si le processus X (t) est ou non stationnaire au sens large (WSS).

**Solution Exercice 6**







(e)

Le processus X (t) n'est pas stationnaire, car le pdf X (t) (x) change avec le temps, et X (t) n'est pas stationnaire au sens large (WSS) car la valeur attendue et la fonction d'autocorrélation dépendent du temps t.

**Exercice 7**

Soit le processus WSS à temps continu, X (t) avec la fonction d'autocorrélation RX(τ) = e−|τ|100+ 4 et de moyenne E[X(t)] = 2. Le processus X (t) est échantillonné avec fs = 100 Hz, conduisant au processus discret X[n].

(a) Donner la fonction d'autocorrélation RX[k] et la moyenne E[X[n]] du processus échantillonné X[n].

On donne un système avec une réponse impulsionnelle h[n] et le processus échantillonné X[n] mentionné ci-dessus comme entrée. La sortie est notée Y [n].

(b) En supposant que h [n] est de la forme h [n] = anu[n], avec u[n] la fonction échelon discrète, |a| ≤1, et E[Y[n]] = 8, calculer la constante a.

Pour le reste de cette question, supposons que RX[k] est donné par RX[k] = (1/2)| k |.

(c) Donner la réponse en amplitude |H(φ)| cela décorrélerait complètement le processus X[n]. Supposons maintenant h[n] = δ[n − 3].

(d) Calculer la fonction d’intercorrélation RXY[k] entre l'entrée et la sortie.

(e) Calculez l'autocorrélation RY[k] de la sortie.

**Solution Exercice 7**

(a)



(b)



(c)

Sortie décorrélée, signifie :





(d)



(e)

Un retard ne modifiera pas l'autocorrélation de l'entrée. La fonction d'autocorrélation vaut donc RY[k] = RX[k]. Aussi, nous pouvons calculer 

**Exercice 8**

Soit X(t) un processus de bruit gaussien blanc qui est l’entrée dans un SLIT avec une réponse fréquentielle donnée par:



Si Y(t) est la sortie de ce SLIT, trouvez



**Solution Exercice 8**

Puisque X(t) est un processus gaussien à moyenne nulle, Y(t) est également un processus gaussien à moyenne nulle. SY(f) est donné par :



Par consequence:



Ainsi :



Nous pourrons enfin écrire



**Exercice 9**

Soit X(t) un processus stationnaire au sens large (WSS) de moyenne nulle avec RX(τ) = e−| τ |. X(t) est l’entré d’un SLIT avec :



Soit Y (t) la sortie.

Trouver mY(t) = E[Y(t)] .

Trouver RY(τ) .

Trouver E[Y(t)2]

**Solution Exercice 9**

Notez que puisque X (t) est WSS, X(t) et Y(t) sont conjointement WSS, et donc Y(t) est WSS. Pour trouver mY(t) , nous pouvons écrire mY = mXH (0) = 0×1 = 0.

Pour trouver RY(τ) , nous trouvons d'abord: SY(f) = SX(f)×|H(f)|2.







**Exercice 10**

Etant donné est le processus stochastique X(t) = A|cos(2πft)| avec variable aléatoire distribuée uniformément dans l'intervalle (continu) [−0,5 ,0,5].

(a) Prendre la fréquence f = 1 Hz et esquisser trois réalisations différentes du processus X (t). (b) Considérez uniquement le cas |cos (2πft)|≠ 0, et calculez la fonction de répartition FX(t)(x), ainsi que la fonction de densité de probabilité fX(t)(x ). Discutez si X(t) est stationnaire.

(c) Calculer E[X(t)] et la fonction d'autocorrélation R(t, τ), et argumenter si X (t) est stationnaire au sens large (WSS ?).

Considérons maintenant le processus stochastique Y (t) = Acos(2πft + Φ) avec la variable aléatoire A à nouveau uniformément distribuée dans l'intervalle (continu) [−0,5, 0,5], et la variable aléatoire Φ uniformément distribuée dans l'intervalle (continu) [0, 2π].

(d) Déterminer si le processus Y(t) est stationnaire au sens large (WSS).

Utilisez la relation cos (a) cos (b) = 12 (cos (a + b) + cos (a − b)).

**Solution Exercice 10**

(b)





La fonction de densité de probabilité n'est pas invariante par translation et donc le processus X(t) n'est pas stationnaire.

(c)



Car E[A] = 0

(d)



Ainsi, le processus est stationnaire au sens large (WSS)