

Gradient, divergence, et rotationnel

OPERATEUR Differentiel et vectoriel "NABLA" ∇

Déf: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$

Cet opérateur vectoriel possède des propriétés analogues à celles de vecteurs ordinaires.

Il est utile pour définir trois quantités qui apparaissent dans des applications pratiques et connues sous le nom de gradient, divergence et rotationnel.

Le GRADIENT. Soit $\Phi(x, y, z)$ définie et différentiable en tout point (x, y, z) dans un certain domaine de l'espace (c'est à dire Φ définit un champ scalaire différentiable).

Alors le gradient de Φ noté $\nabla \Phi$ ou $\text{grad } \Phi$, se définit par

$$\nabla \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k}$$

Remarque: $\nabla \Phi$ définit un champ de vecteurs.

La composante de $\nabla \Phi$ dirigée suivant un vecteur unitaire $\vec{a}$ est donnée par $\nabla \Phi \cdot \vec{a}$ et s'appelle la dérivée directionnelle de Φ suivant la direction $\vec{a}$. En physique, c'est le Taux de variations de Φ en (x, y, z) suivant la direction $\vec{a}$.

La Divergence: Soit $V(x, y, z) = V_1 \vec{i} + V_2 \vec{j} + V_3 \vec{k}$ définie et différentiable en tout point de l'espace (x, y, z) d'un certain domaine de l'espace (c.à.d. définit un champ de vecteurs différentiable). Alors, la divergence de V , notée

$\nabla \cdot \vec{V}$ ou $\text{div } \vec{V}$ se définit par

$$\nabla \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (V_1 \vec{i} + V_2 \vec{j} + V_3 \vec{k}) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

Remarque: $\nabla \cdot \vec{V} \neq \vec{V} \cdot \nabla$

Le rotationnel

Déf: $\nabla \wedge \vec{V}$ ou $\text{rot } \vec{V}$

$$\nabla \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \wedge (V_1 \vec{i} + V_2 \vec{j} + V_3 \vec{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} =$$

ch 0.1

$$= \left| \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right| \vec{i} - \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right| \vec{j} + \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right| \vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Propriétés formules utilisant ∇

Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont des fonctions vectorielles différentiables et si Φ et Ψ sont des fonctions scalaires différentiables alors.

1. $\nabla(\Phi + \Psi) = \nabla\Phi + \nabla\Psi$ ou $\text{grad}(\Phi + \Psi) = \text{grad}\Phi + \text{grad}\Psi$

2. $\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$ ou $\text{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{div}\vec{A} + \text{div}\vec{B}$

3. $\nabla \wedge (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \wedge \vec{A} + \nabla \wedge \vec{B}$ ou $\text{rot}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{rot}\vec{A} + \text{rot}\vec{B}$

4. $\nabla \cdot (\Phi \vec{A}) = (\nabla\Phi) \cdot \vec{A} + \Phi(\nabla \cdot \vec{A})$

5. $\nabla \wedge (\Phi \vec{A}) = (\nabla\Phi) \wedge \vec{A} + \Phi(\nabla \wedge \vec{A})$

6. $\nabla \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \wedge \vec{B})$

7. $\nabla \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B})$

8. $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) + \vec{A} \wedge (\nabla \wedge \vec{B})$

9. $\nabla \cdot (\nabla\Phi) \equiv \nabla^2\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ s'appelle OPÉRATEUR LAPLACIEN $\nabla^2 \equiv \Delta$

10. $\nabla \wedge (\nabla\Phi) = 0$ Le rotationnel du gradient de Φ est nul

11. $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) = 0$ La divergence du rotationnel de $\vec{A}$ est nul

12. $\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

Remarque : dans les formules 9 et 12 nous supposons que Φ et $\vec{A}$ possèdent des dérivées secondes partielles continues.

$$\boxed{\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}$$

opérateur d'Alembertien

Biblio

② Électricité Générale
par Jacques THUJIN

①

~~Physique~~ : terie Schan

ch 002

MURRAY R. SPIEGEL

Analyse vectorielle.

Equations de Maxwell et conditions aux limites.

Les conditions aux limites

E : champ électrique
 D : densité du flux électrique (induction électrique).

H : vecteur excitation magnétique
 B : densité du flux magnétique.

σ : Conductivité
 [siemens/m] = [S/m]

$$D = \epsilon E, \quad B = \mu H, \quad J_c = \sigma E$$

E : [V/m]

μ : loi d'Ohm

J_c : densité de courant
 [A/m²].

ρ : densité de charge

Equations de Maxwell
forme locale

$$\nabla \times H = J_c + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

Forme intégrale

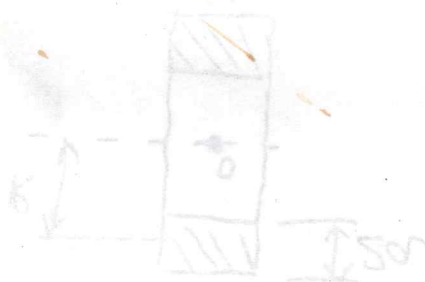
$$\oint H \cdot dl = \int (J_c + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot ds \quad \text{Th. d'Ampère}$$

$$\oint E \cdot dl = - \int (\frac{\partial B}{\partial t}) \cdot ds \quad \text{Loi de Faraday}$$

$$\oint D \cdot ds = \int \rho \cdot dv \quad \text{Th. de Gauss}$$

$$\oint B \cdot ds \quad \text{il n'y a pas de charges magnétiques}$$

exprime les lois physiques.



constant μ inférieure à
 les deux se connectent par les conducteurs
 selon les courants magnétiques ou les courants
 les deux se connectent par les conducteurs
 Ex: $\mu = 1$ les conducteurs magnétiques se connectent

Bilal JOSEPH A.
 ED MINISTRE
 Electromagnétique

ch 0,3

ferie sham.