

---

# Chapitre 1

## Modélisation des signaux et des systèmes échantillonnés

### 1.1 INTRODUCTION

Dans la réalité industrielle, la complexité des systèmes, ainsi que celle des traitements à réaliser, nécessite souvent le recours à des outils numériques de traitement : ordinateurs, calculateurs, systèmes numériques en tout genre. De tels outils ne peuvent en aucun cas s'accommoder de signaux continus ; ceux-ci doivent être transformés en suites de nombres pour pouvoir être traités. De même, ces systèmes délivrent, à leur sortie, des suites de valeurs numériques, autrement dit, des signaux numériques.

Pour transformer un signal continu en une suite de nombres compatibles avec un système de traitement numérique, on a recours à deux opérations successives : l'échantillonnage qui consiste à prélever, à intervalles de temps réguliers, des valeurs discrètes du signal, puis, la conversion analogique numérique qui transforme ces échantillons en nombres, généralement codés sous forme binaire (Figure 1.1).

L'échantillonnage réalise donc une discrétisation dans le temps, tandis que la conversion analogique-numérique réalise une discrétisation en amplitude.

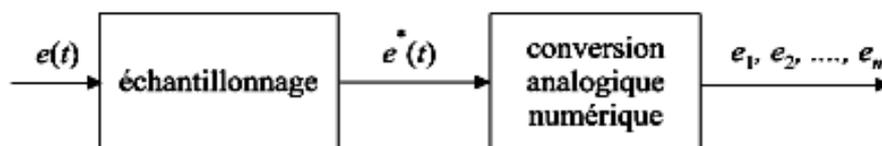


Figure.1.1 : Échantillonnage et conversion analogique numérique d'un signal.

### 1.2 PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'ÉCHANTILLONNAGE DES SIGNAUX

#### 1.2.1 Peigne de Dirac

L'échantillonnage d'un signal temporel  $s(t)$  consiste à transformer celui-ci en une suite discrète  $s(nT_e)$  de valeurs prises à des instants  $nT_e$ .  $T_e$  est appelée période d'échantillonnage. Les instants  $nT_e$  sont appelés les instants d'échantillonnages. Pratiquement, échantillonner un signal revient à le multiplier par une fonction d'échantillonnage  $p(t)$ , nulle partout, sauf au voisinage des instants  $nT_e$ . Cette fonction, qui porte souvent le nom de peigne de Dirac, est représentée sur la Figure 1.2.

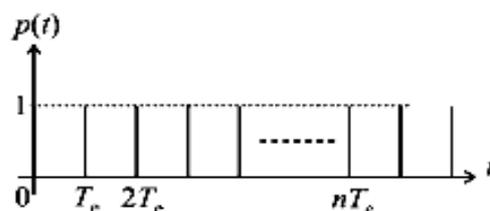


Figure.1.2 : Fonction d'échantillonnage.

Le résultat d'une opération d'échantillonnage, est représenté sur la Figure 1.3:

$$s^*(t) = p(t)s(t)$$

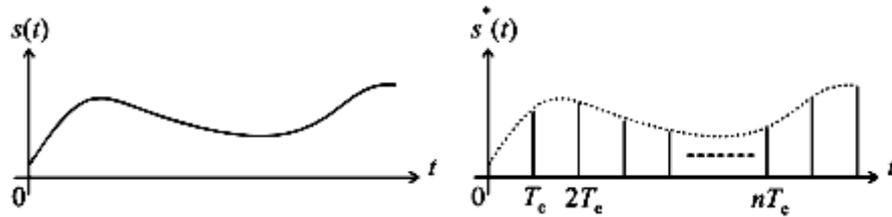


Figure.1.3 : Échantillonnage d'un signal quelconque.

L'échantillonnage d'un signal temporel  $s(t)$  consiste donc à transformer celui-ci en une suite discrète  $s_k = s(k)$  de valeurs prises à des instants  $kT_e$ . Ici  $k$  et  $n$  sont des entiers naturels ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) et  $T_e$  est appelée période d'échantillonnage :

Soit la suite :  $s(0), s(T_e), s(2T_e), \dots, s(nT_e)$

Que l'on note en générale :  $S^*(t) = \{S_0, S_1, S_2, \dots, S_n\}$

Ou encore :  $s(k) = \{S_0, S_1, S_2, \dots, S_n\}$

### 1.2.2 Théorème de Shannon

Un des objectifs essentiels de l'échantillonnage consiste à ne pas perdre d'information lors de la discrétisation dans le temps, ce qui peut se traduire par le fait qu'il doit être possible, à partir du spectre du signal échantillonné, de reconstituer simplement celui du signal original. Un simple coup d'œil au spectre  $|S^*(f)|$  nous montre que cela est possible s'il n'existe aucun recouvrement entre les différents segments de spectre (Figure.1.4).

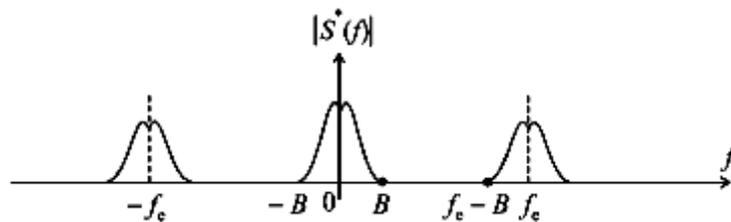


Figure.1.4 : Spectre d'un signal échantillonné.

Si  $2B$  est la largeur spectrale du signal  $s(t)$ , autrement dit sa limite fréquentielle supérieure, le premier segment décalé, dans le spectre de  $s^*(t)$ , qui se trouve centré sur la fréquence  $f_e$ , s'étend de  $f_e - B$  à  $f_e + B$ . La condition de non recouvrement est donc, de toute évidence :

$$B < f_e - B$$

$$\text{Soit : } f_e > 2B$$

Cela constitue le **théorème de Shannon** qui peut également s'énoncer de la manière suivante :

Pour préserver, lors de son échantillonnage, l'information contenue dans un signal, la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  doit être supérieure au double de la largeur spectrale du signal.

### 1.3 EXEMPLES DE SIGNAUX ÉCHANTILLONNÉS SIMPLES

#### 1.3.1 Impulsion unité

On définit l'impulsion unité échantillonnée par le signal :

$$\delta^*(t) = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} \delta^*(nT_e) = 1 & \text{pour } n = 0 \\ \delta^*(nT_e) = 0 & \text{pour } n \neq 0 \text{ et } n \rightarrow \infty \end{cases}$$

La Figure 1.5 propose une représentation schématique de cette impulsion unité.

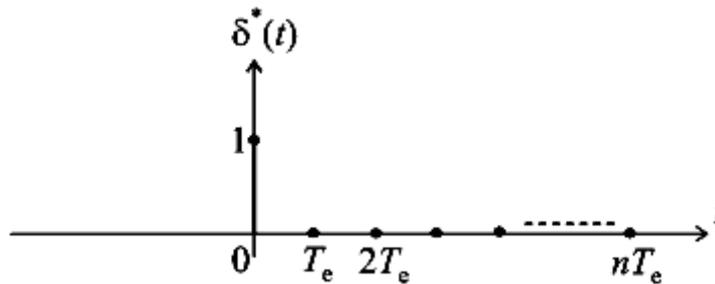


Figure.1.5 : Impulsion unité.

#### 1.3.2 Echelon unité

On définit l'échelon unité échantillonné par le signal :

$$u^*(t) = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} u(k) = 1 & \forall k \geq 0 \\ u(k) = 0 & \forall k < 0 \end{cases}$$

La Figure 1.6 propose une représentation schématique de cet échelon unité.

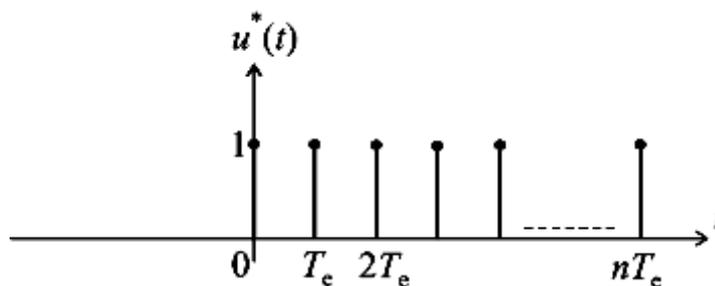


Figure.1.6 : Echelon unité.

Cet échelon unité n'est rien d'autre que la somme d'impulsions unités décalées dans le temps :

$$u^*(t) = \delta^*(t) + \delta^*(t - T_e) + \delta^*(t - 2T_e) + \dots$$

Soit :

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^*(t - kT_e)$$

On pose parfois :

$$\delta^*(t - kT_e) = \delta_k$$

Ce qui nous conduit à la notation :  $u^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k$

### 1.4 TRANSFORMÉE EN Z DES SIGNAUX ÉCHANTILLONNÉS

#### 1.4.1 Définition

Soit  $s(t)$  un signal continu quelconque que l'on échantillonne à une fréquence  $f_e$  (soit une période  $T_e$ ), en respectant, bien évidemment, le théorème de Shannon.

On a :  $s^*(t) = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n\}$

Ou encore :  $s(k) = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n\}$

Cette suite n'est rien d'autre que la somme d'impulsions unités décalées dans le temps et multipliées, chacune, par le coefficient  $s_k$  :

$$s^*(t) = s_0 \delta^*(t) + s_1 \delta^*(t - T_e) + s_2 \delta^*(t - 2T_e) + \dots$$

$$s^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k \delta^*(t - kT_e)$$

$$s^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k \delta_k$$

Nous pouvons toujours calculer la transformée de Laplace de  $s^*(t)$  :

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k \Delta_k^*(p)$$

Dans cette expression,  $\Delta_k^*(p)$  représente la transformée de Laplace d'une impulsion unité à l'instant  $kT_e$ , représentée sur la Figure 1.7.

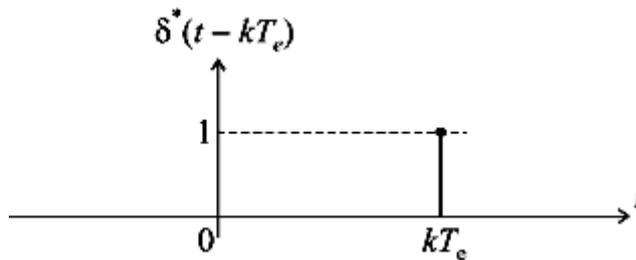


Figure.1.7 : Impulsion unité à l'instant  $k$ .

Par définition :  $\Delta_k^*(p) = \int_0^{+\infty} \delta_k^*(t) e^{-pt} dt$

En appliquant le théorème du retard et en nommant  $\Delta_k^*(p)$  la transformée de Laplace de l'impulsion unité :

$$\Delta_k^*(p) = \Delta_0^*(p) e^{-pkT_e}$$

Avec :

$$\Delta_0^*(p) = \int_0^{+\infty} \delta_0^*(t) e^{-pt} dt$$

De la même manière (en appliquant le théorème du retard pour  $\Delta_0^*(p)$ ) :

$$\Delta_0^*(p) = \int_0^{+\infty} \delta_0^*(t) e^{-pt} dt = 1 \quad \text{car : } \delta^*(t) = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$$

Il vient alors :

$$\Delta_k^*(p) = e^{-pkT_e}$$

D'où :

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k e^{-pkT_e}$$

En posant  $z = e^{pT_e}$ , on définit la transformée en  $z$  du signal  $s(t)$  par :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k z^{-k}$$

La transformation en  $z$  peut être notée :  $s(t) \rightarrow Z[s(t)]$

La transformée en  $z$  d'un signal n'existe, bien évidemment, que si la somme qui la définit converge. On peut montrer que ce domaine de convergence est de la forme  $|z| > r$  avec  $r \in \mathbb{R}$ . Par la suite, nous ne nous intéresserons qu'à des signaux pour lesquels on peut effectivement définir une transformée en  $z$ .

### 1.4.2 Propriétés de la transformée en $z$

#### a) Linéarité

Soit  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$ , respectivement deux signaux quelconques possédant chacun une transformée en  $z$ ,  $S_1(z)$  et  $S_2(z)$ . La transformée en  $z$  d'une combinaison linéaire  $\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$  de ces deux fonctions est égale à  $\lambda S_1(z) + \mu S_2(z)$ .

#### b) Théorème du retard

Soit  $s(t)$  un signal quelconque possédant une transformée en  $z$ ,  $S(z)$  et soit  $x(t) = s(t - aT_e)$  correspondant au même signal retardé d'un temps  $aT_e$ .

La transformée en  $z$  de  $s(t - aT_e)$  est égale à :  $X(z) = z^{-a} S(z)$

#### c) Théorème de la valeur finale

Soit  $s(t)$  un signal quelconque possédant une transformée en  $z$ ,  $S(z)$ . Soit  $s_k$  la suite échantillonnée correspondant au signal  $s(t)$ . Le théorème de la valeur finale permet de connaître la valeur vers laquelle tend la suite  $s_k$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , autrement dit lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) S(z) \right]$$

#### d) Multiplication par le temps

Soit  $s(t)$  un signal quelconque possédant une transformée en  $z$ ,  $S(z)$ . Soit  $x(t)$  le signal défini par  $x(t) = t \cdot s(t)$ . Alors :

$$X(z) = -zT_e \frac{dS(z)}{dz}$$

#### e) Changement d'échelle

Soit  $s(t)$  un signal quelconque possédant une transformée en  $z$ ,  $S(z)$ . Soit  $s_k$  la suite échantillonnée correspondant au signal  $s(t)$ . Soit  $x_k$  la suite d'échantillons définie par :

$$x_k = a^k s_k \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Le signal  $x(t)$  correspondant à la suite  $x_k$  possède une transformée en  $z$  telle que :

$$X(z) = S\left(\frac{z}{a}\right)$$

## 1.5 FONCTION DE TRANSFERT EN Z

### 1.5.1 Relations entre échantillons de sortie et échantillons d'entrée : équation récurrente

La modélisation initiale d'un système à temps discret conduit souvent à l'écriture d'une équation récurrente entre différents termes des séquences d'entrée et de sortie. La forme générale d'une équation récurrente linéaire peut être donnée par :

$$a_n s(k+n) + a_{n-1} s(k+n-1) + \dots + a_1 s(k+1) + a_0 s(k) = b_m e(k+m) + b_{m-1} e(k+m-1) + \dots + b_1 e(k+1) + b_0 e(k)$$

Par hypothèse  $a_n \neq 0$  et  $n$  est appelé l'ordre du système. Le système est dit *causal* si les sorties dépendent uniquement des événements passés. Pour cela il doit obligatoirement vérifier  $m \leq n$ . Cette formulation de l'équation récurrente est bien adaptée au calcul numérique. C'est la forme sous laquelle seront présentés les algorithmes de commande des procédés.

### 1.5.2 Définition de la fonction de transfert en $z$

De la même manière que l'on associe à un système à temps continu, une fonction de transfert, par application de la transformation de Laplace à son équation différentielle, on peut associer à un système à temps discret, une fonction de transfert en  $z$ , par application de la transformation en  $z$  à son équation récurrente. Sous l'hypothèse que les conditions « initiales » sont nulles ( $s(0) = s(1) = \dots = s(n-1) = e(0) = e(1) = \dots = e(m-1) = 0$ ) il vient la relation suivante :

$$(a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n) S(z) = (b_0 + b_1 z + \dots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m) E(z)$$

Soit encore :

$$S(z) = \frac{N(z)}{D(z)} E(z)$$

Avec :

$$\frac{N(z)}{D(z)} = G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n}$$

Qui est définie comme la **fonction de transfert** en  $z$  du système. Dans le cas général où les conditions initiales sont non nulles la représentation en  $z$  du système s'écrit plus exactement :

$$S(z) = \frac{N(z)}{D(z)} E(z) + \frac{I(z)}{D(z)}$$

Où le polynôme  $I(z)$  ne dépend que des conditions initiales. Il influe sur la sortie du système sans modifier le comportement dû au signal d'entrée  $U(z)$ .

La factorisation du numérateur et du dénominateur conduit à la **forme pôles, zéros, gain** suivante :

$$G(z) = \frac{b_m (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)}{a_n (z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)}$$

Avec :  $p_{i=1,\dots,n}$  : pôles     $z_{j=1,\dots,m}$  : zéros     $k = \frac{b_m}{a_n}$  : gain

Par définition les **pôles** du système sont les racines du polynôme dénominateur et les **zéros** du système sont les racines du polynôme numérateur. Les uns et les autres sont par défaut des nombres soit réels soit complexes.

## 1.6 TRANSFORMÉE DE FOURIER À TEMPS DISCRET

### 1.6.1 Définition

Soit  $s(t)$  un signal continu quelconque que l'on échantillonne à une fréquence  $f_e$ , en respectant, bien évidemment, le théorème de Shannon. Soit  $S(z)$  sa transformée en  $z$ .

Rappelons que :

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-pkT_e}$$

Et que la transformée en  $z$  a été obtenue en posant  $z = e^{pT_e}$  :

$$S(z) = \sum_{k=0}^n s_k z^{-k}$$

Exactement comme nous pouvons calculer la transformée de Fourier d'un signal à temps continu en posant  $p = j\omega$ , nous pouvons tout autant poser  $e^{pT_e} = e^{j\omega T_e}$  à condition, bien sûr, que la somme, ainsi transformée, converge vers une valeur finie, ce que nous supposerons. On obtient alors :

$$S^*(j\omega) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-j\omega k T_e}$$

Ou encore :

$$\sigma(f) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-j2\pi k f / f_e}$$

La fonction  $\sigma(f)$  est appelée transformée de Fourier à temps discret du signal  $s_k$ . Son module représente, bien sûr, le spectre du signal échantillonné.

### 1.6.2 Exemple

Soit  $s(t)$  le signal défini par  $s(t) = e^{-t}$  pour  $t \geq 0$ . La transformée en  $z$  de ce signal, échantillonné à la fréquence  $f_e$  a pour expression :

$$S(z) = \frac{z}{z - e^{-T_e}}$$

Posons :

$$z = e^{j\omega T_e}$$

On obtient :

$$\sigma(f) = \frac{e^{j\omega T_e}}{e^{j\omega T_e} - e^{-T_e}}$$

Calculons à présent le spectre du signal :

$$|\sigma(f)| = \left| \frac{e^{j\omega T_e}}{e^{j\omega T_e} - e^{-T_e}} \right| = \frac{1}{|(\cos \omega T_e - \cos T_e) + j(\sin \omega T_e + \sin T_e)|}$$

$$|\sigma(f)| = \frac{1}{\sqrt{(\cos \omega T_e - \cos T_e)^2 + (\sin \omega T_e + \sin T_e)^2}}$$

$$|\sigma(f)| = \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \cos \omega T_e \cos T_e + 2 \sin \omega T_e \sin T_e}}$$

$$|\sigma(f)| = \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \cos(\omega + 1)T_e}} = \frac{1}{\sqrt{2 - \left(2 \sin^2 \frac{(\omega + 1)T_e}{2}\right)}}$$

$$|\sigma(f)| = \frac{1}{2 \left| \sin \frac{(\omega + 1)T_e}{2} \right|} = \frac{1}{2 \left| \sin \frac{(2\pi f + 1)}{2f_e} \right|}$$

Nous pouvons tracer ce spectre, en prenant soin de se souvenir que le signal a obligatoirement été échantillonné en respectant le théorème de Shannon, autrement dit en considérant que le signal original possède une largeur spectrale  $B < f_e/2$ .

On tracera donc ce spectre pour  $0 \leq f \leq f_e/2$

Comme :

$$\frac{1}{2f_e} \leq \frac{(2\pi f + 1)}{2f_e} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2f_e}$$

On a :

$$|\sigma(f)| = \frac{1}{2 \sin \frac{(2\pi f + 1)}{2f_e}}$$

Si  $f_e$  est suffisamment grande, il s'agit d'un spectre qui décroît de  $\sigma_{\max} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2f_e}} \approx f_e$  jusqu'à

environ de  $1/2$  (Figure 1.8).

En réalité, le spectre possède un minimum pour  $\frac{(2\pi f + 1)}{2f_e} = \frac{\pi}{2}$ , autrement dit pour une fréquence déjà très élevée et voisine de  $f_e/2$ .

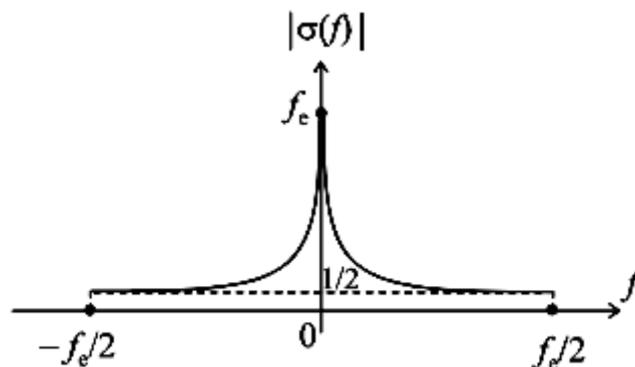


Figure.1.8 : Spectre du signal.

## 1.7 COMPORTEMENT FRÉQUENTIEL DES SYSTÈMES ECHANTILLONNÉS

### 1.7.1 Principes généraux

Considérons un système de fonction de transfert en  $z$  égale à  $G(z)$  sollicité par un signal d'entrée possédant une transformée en  $z$ ,  $E(z)$  et délivrant un signal de sortie de transformée en  $z$ ,  $S(z)$  (Figure 1.9).

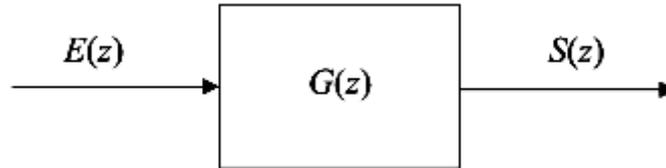


Figure.1.9 : Schéma général d'un système échantillonné.

Le système est régi par l'équation :  $S(z) = G(z) E(z)$

En posant  $z = e^{j\omega T_e}$ , on obtient  $S(e^{j\omega T_e}) = G(e^{j\omega T_e}) E(e^{j\omega T_e})$

Les termes  $E(e^{j\omega T_e})$  et  $S(e^{j\omega T_e})$  représentent respectivement les transformées de Fourier des signaux à temps discret d'entrée et de sortie. Par conséquent,  $G(e^{j\omega T_e})$  représente le comportement fréquentiel du système : il s'agit de sa fonction de transfert en fréquence.

### 1.7.2 Exemple

On considère un système échantillonné régi par la relation de récurrence :

$$s(k) = \frac{1}{2}(e(k) + s(k-1))$$

En appliquant la transformée en  $z$  à cette équation, on obtient :

$$S(z) = \frac{1}{2}[E(z) + z^{-1}S(z)]$$

D'où :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0,5}{1 - 0,5z^{-1}}$$

Soit :

$$G(\omega) = \left| \frac{0,5}{1 - 0,5e^{-j\omega T_e}} \right| = \frac{0,5}{|1 - 0,5(\cos \omega T_e - j \sin \omega T_e)|}$$

$$G(\omega) = \frac{0,5}{\sqrt{(1 - 0,5 \cos \omega T_e)^2 + 0,25 \sin^2 \omega T_e}}$$

Finalement :

$$G(\omega) = \frac{0,5}{\sqrt{1,25 - \cos \omega T_e}}$$

Ou encore :

$$G(f) = \frac{0,5}{\sqrt{1,25 - \cos 2\pi f T_e}} = \frac{0,5}{\sqrt{1,25 - \cos 2\pi \frac{f}{f_e}}}$$

Il convient de tracer cette fonction pour  $f$  variant de 0 à  $f_e/2$ . Sur cet intervalle,  $\cos 2\pi f T_e$  décroît de 1 à -1.  $G(f)$  est donc une fonction strictement décroissante.

On a : 
$$G_{\max} = G(0) = \frac{0,5}{\sqrt{0,25}} = 1$$

Et : 
$$G_{\min} = G\left(\frac{f_e}{2}\right) = \frac{0,5}{\sqrt{1,25 - \cos \pi}} = \frac{0,5}{\sqrt{2,25}} = \frac{1}{3}$$

La Figure 1.10 représente le diagramme de gain fréquentiel du système.

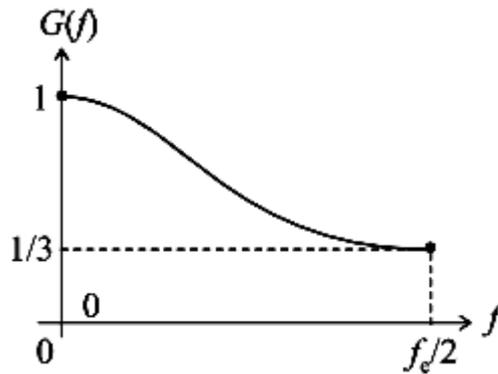


Figure.1.10 : Diagramme de gain du système.

**Remarque :** *A contrario* des systèmes à temps continus, l’usage, pour les systèmes échantillonnés, consiste à tracer la courbe de gain directement en coordonnées cartésiennes linéaires.

## 1.8 RELATIONS ENTRE LES MODÈLES À TEMPS CONTINU ET À TEMPS DISCRET

### 1.8.1 Problématique

Considérons un système à temps continu modélisé par sa fonction de transfert  $G(p)$  (Figure 1.11). Nous possédons une bonne connaissance de ce type de modèles et il est tout à fait légitime de s’interroger sur l’existence d’un système échantillonné possédant les mêmes caractéristiques, c’est-à-dire le même comportement temporel et le même comportement fréquentiel.

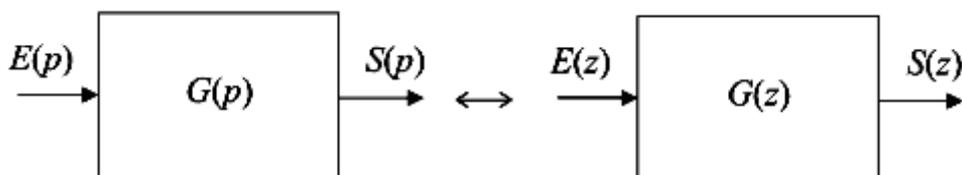


Figure.1.11 : Recherche d’une équivalence temps continu – temps discret.

Le système échantillonné  $G(z)$  sera réputé équivalent au système  $G(p)$  si, soumis à un signal d’entrée  $E(z)$  correspondant à l’échantillonnage du signal continu  $e(t)$  représenté par  $E(p)$ , il délivre à sa sortie un signal  $S(z)$  correspondant à l’échantillonnage du signal  $s(t)$  qui aurait été délivré par le système  $G(p)$ .

### 1.8.2 Équivalence à la dérivation

#### a) Définition

Une fonction de transfert en temps continu est issue d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Cette équation est formée de dérivées successives des signaux d'entrée et de sortie. Un des moyens les plus simples d'effectuer le lien entre une représentation en temps continu et en temps discret est de considérer que la variation  $dx/dt$  en temps continu correspond à la variation du signal entre deux instants d'échantillonnage :

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(k) - x(k-1)}{T_e}$$

Cette équivalence est d'autant plus vraie que la fréquence d'échantillonnage est grande. Or la transformée en  $z$  de l'expression de droite est :

$$Z\left(\frac{x(k) - x(k-1)}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} X(z)(1 - z^{-1})$$

De même, le terme  $dx/dt$  a pour transformée de Laplace :  $pX(p)$ . Par conséquent, l'équivalence naturelle entre une fonction de transfert continue en  $p$  et sa fonction de transfert échantillonnée en  $z$  est :

$$p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

**Remarque :** La connaissance précise de la fréquence d'échantillonnage est nécessaire pour disposer de cette équivalence.

#### b) Exemple

Soit un système à temps continu du premier ordre de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

Effectuons la transformation proposée :

$$G(z) = \frac{K}{1 + T\left(\frac{1 - z^{-1}}{T_e}\right)} = \frac{K}{1 + \frac{T}{T_e} - \frac{T}{T_e} z^{-1}}$$

Comparons à présent les courbes de réponse fréquentielle de ces deux systèmes.

À titre exceptionnel, nous tracerons le gain fréquentiel du système à temps continu  $G(p)$ , non pas sur un diagramme de Bode, mais sur un diagramme à coordonnées cartésiennes linéaires afin de pouvoir comparer directement les deux courbes.

Pour le modèle à temps continu, on a :

$$G(\omega) = |G(\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

Traçons cette courbe en pointillés sur la Figure 1.12. Rappelons qu'une inflexion se produit à la fréquence  $f = 1/2\pi T$  et notons, par ailleurs, que :

$$G(0) = K$$

$$G\left(\frac{f_e}{2}\right) = \frac{K}{\sqrt{1+4\pi^2 T^2 f_e^2}}$$

Pour le modèle à temps discret, on a :

$$G(\omega) = \frac{K}{\left|1 + \frac{T}{T_e} - \frac{T}{T_e} e^{-j\omega T_e}\right|} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 + \frac{T}{T_e}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_e}\right)^2 - \frac{2T}{T_e} \left(1 + \frac{T}{T_e}\right) \cos \omega T_e}}$$

Notons que :

$$G\left(\frac{f_e}{2}\right) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 + \frac{2T}{T_e}\right)^2}} = \frac{K}{1 + \frac{2T}{T_e}} = \frac{K}{1 + 2Tf_e}$$

(Cette valeur est nettement supérieure à celle fournie par le modèle à temps continu)

Et que :

$$G(0) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 + \frac{T}{T_e}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_e}\right)^2 - \frac{2T}{T_e} \left(1 + \frac{T}{T_e}\right)}} = K$$

(Cette valeur est identique à celle fournie par le modèle à temps continu).

Traçons (en trait plein) la courbe représentative du gain du système à temps discret sur la même figure.

La conclusion est évidente : les deux courbes coïncident aux basses fréquences mais l'équivalence proposée devient de moins en moins précise au fur et à mesure où l'on se rapproche de  $f_e/2$ .

**Remarque :** Rappelons que la courbe de réponse d'un système à temps discret n'a de sens que sur l'intervalle  $\left[0, \frac{f_e}{2}\right]$

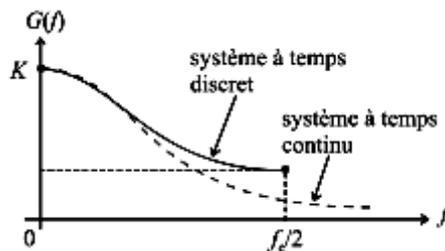


Figure.1.12 : Comparaison des deux modèles.

### 1.8.3 Équivalence à l'intégration

#### a) Définition

L'équivalence à l'intégration, appelée également transformation bilinéaire propose une correspondance plus précise que l'équivalence à la dérivation. Nous mentionnons ici cette

équivalence sans la justifier :

$$p \leftrightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}$$

**b) Exemple**

Reprenons notre système à temps continu du premier ordre de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{1+Tp}$$

Effectuons la transformation proposée :

$$G(z) = \frac{K}{1+T\left(\frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}\right)} = \frac{K(1+z^{-1})}{(1+z^{-1}) + \frac{2T}{T_e}(1-z^{-1})}$$

Soit :

$$G(z) = \frac{K(1+z^{-1})}{(1+z^{-1}) + \frac{2T}{T_e}(1-z^{-1})} = \frac{K(1+z^{-1})}{1 + \frac{2T}{T_e} + \left(1 - \frac{2T}{T_e}\right)z^{-1}}$$

**Remarque :** La connaissance précise de la fréquence d'échantillonnage est toujours nécessaire pour disposer de cette équivalence.

**1.8.4 Équivalence modale**

Dans l'esprit de conformité entre les réponses impulsionnelles en temps continu et en temps discret, on peut proposer une approche modale de l'équivalence entre fonction de transfert en temps continu et en temps discret. Cette équivalence est basée sur la concordance des pôles entre les deux fonctions. On utilise alors la transformation :

$$p - p_i \leftrightarrow z - e^{p_i T_e}$$

Toutefois, ce type d'équivalence possède l'inconvénient de ne traiter que des pôles des fonctions. Il est souvent nécessaire d'ajuster leurs numérateurs en fonction de critères particuliers. Les expressions fournies en annexe B correspondent à des fonctions de transfert que l'on a systématiquement adaptées pour que leurs gains statiques concordent.

Ainsi :

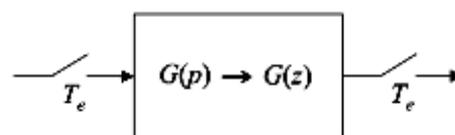
$$G(p) = \frac{1}{p - p_i} \leftrightarrow G(z) = \left(-\frac{1}{p_i}\right) \frac{1 - e^{p_i T_e}}{z - e^{p_i T_e}}$$

De sorte que :

$$G(0) = \frac{1}{0 - p_i} \leftrightarrow G(1) = -\left(\frac{1}{p_i}\right) \frac{1 - e^{p_i T_e}}{1 - e^{p_i T_e}}$$

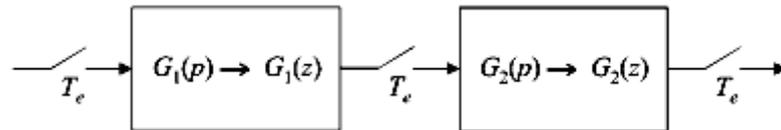
**1.8.5 Équivalence d'une association de plusieurs systèmes**

On ne peut déterminer l'équivalent  $G(z)$  d'un système de fonction de transfert en temps continu  $G(p)$  que si ses signaux d'entrée et de sortie sont échantillonnés (Figure 1.13).



**Figure.1.13 :** Principe de l'équivalence Laplace – Z.

Par conséquent, il est impossible, lorsque deux systèmes sont associés en cascade (Figure.1.14) de calculer l'équivalent de la fonction de transfert globale  $G_0(p) = G_1(p)G_2(p)$  par la multiplication pure et simple de  $G_1(z)G_2(z)$ . En effet, en cherchant l'équivalent  $G_0(z)$  de  $G_0(p)$ , on suppose implicitement que seuls les signaux d'entrée et de sortie de  $G_0$  sont échantillonnés. Et lorsque l'on écrit  $G_1(z)G_2(z)$ , on suppose que le signal sortant de  $G_1$  et entrant dans  $G_2$  est lui aussi échantillonné, sinon, on ne pourrait trouver ces deux équivalents.



**Figure.1.14 :** Principe de l'équivalence Laplace – Z pour une association en cascade.

En conclusion, on ne peut pas déterminer l'équivalent en  $z$  d'une association de plusieurs systèmes en multipliant les deux fonctions de transfert en temps continu, puis en cherchant l'équivalent de la fonction globale ; il faut impérativement calculer d'abord les fonctions de transfert en  $z$  de chaque système, puis multiplier ces fonctions de transfert en  $z$  pour obtenir la fonction de transfert échantillonnée de l'ensemble.