
Chapitre 2

Stabilité et performances des systèmes échantillonnés asservis

2.1 MISE EN ÉQUATION DES ASSERVISSEMENTS ÉCHANTILLONNÉS

2.1.1 Fonction de transfert en boucle fermée

Tout comme les systèmes continus, les systèmes échantillonnés peuvent être asservis selon le même principe de la boucle fermée (Figure 2.1).

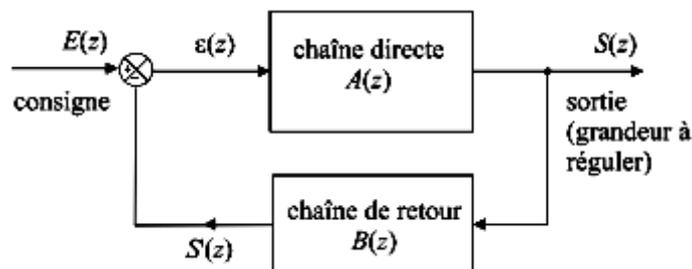


Figure.2.1 : Schéma général d'un système échantillonné asservi.

La chaîne directe et la chaîne de retour sont modélisées par leurs fonctions de transfert en z et les signaux d'entrée et de sortie sont bien évidemment échantillonnés à une fréquence f_e et possèdent chacun une transformée en z : $E(z)$ et $S(z)$. L'écart $\varepsilon(t)$ n'échappe pas à la règle. Soit $\varepsilon(z)$ sa transformée en z .

Tout comme dans le cas des systèmes à temps continu, on définit les fonctions de transfert en boucle ouverte $G(z)$ et en boucle fermée $H(z)$ par :

$$G(z) = A(z)B(z)$$

Et :

$$H(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)B(z)}$$

Dans le cas d'une boucle à retour unitaire, on a $B(z) = 1$ et, par conséquent :

$$G(z) = A(z)$$

Soit :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

2.1.2 Relation temps continu – temps discret en boucle fermée

Considérons un système à temps continu asservi, selon le schéma général de la Figure 2.2.

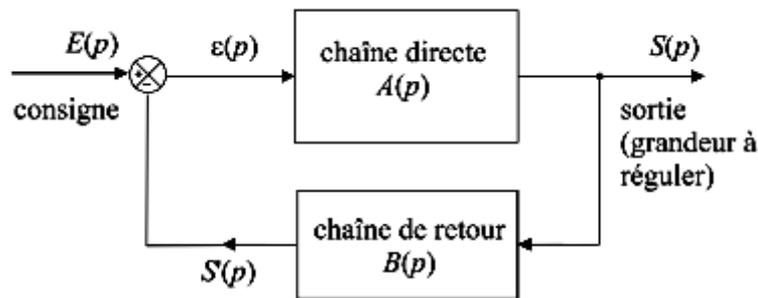


Figure.2.2 : Schéma général d'un système à temps continu asservi

Chacun des sous-systèmes constitutifs $A(p)$ et $B(p)$ possède un équivalent en temps discret $A(z)$ et $B(z)$, comme cela a été étudié au chapitre précédent. Ces équivalents supposent que chacun de ces sous-systèmes possèdent une entrée et une sortie échantillonnées (Figure 2.3).

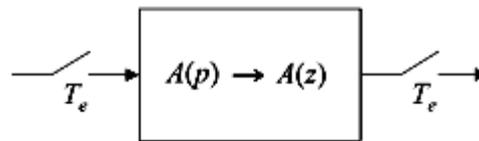


Figure.2.3 : Conditions d'équivalence Laplace – Z

Si on se contentait, dans le schéma de la Figure 2.2, d'échantillonner uniquement le signal de consigne et le signal de sortie, on obtiendrait le schéma de la figure 2.4, mais, dans cette configuration, le système obtenu serait complètement différent de celui auquel on s'attend et qui est représenté sur la figure 2.5. En effet, il n'est pas possible de déterminer l'équivalent $A(z)$ de $A(p)$ si son signal d'entrée n'est pas échantillonné. Il est donc nécessaire de disposer d'un modèle dans lequel chaque signal est échantillonné.

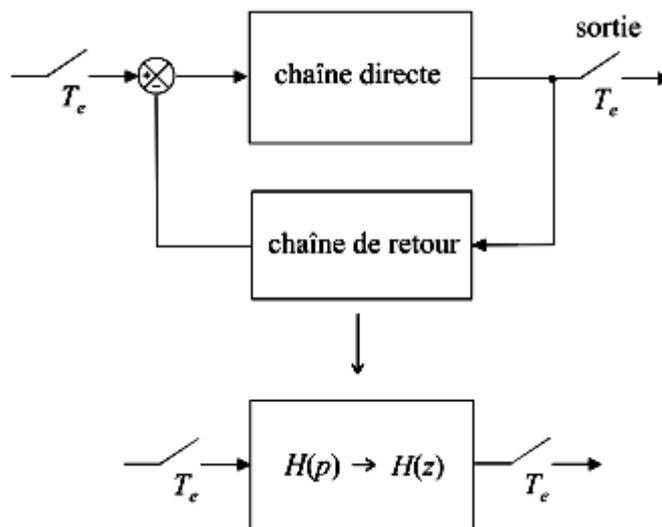


Figure.2.4 : Échantillonnage de la consigne et de la sortie

La principale conséquence de cette constatation est le mode de calcul de la fonction de transfert en boucle fermée d'un système asservi à temps discret lorsque celui-ci est déterminé à partir d'un modèle à temps continu : il n'est pas possible de déterminer la fonction de transfert en z en boucle fermée à partir de l'équivalence de la fonction de transfert en boucle fermée en temps continu $H(p)$. Il faut déterminer indépendamment les fonctions de transfert en z de chaque sous-système (figure 2.5) et calculer la fonction de transfert en boucle fermée $H(z)$ à partir de l'expression :

$$H(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)B(z)}$$

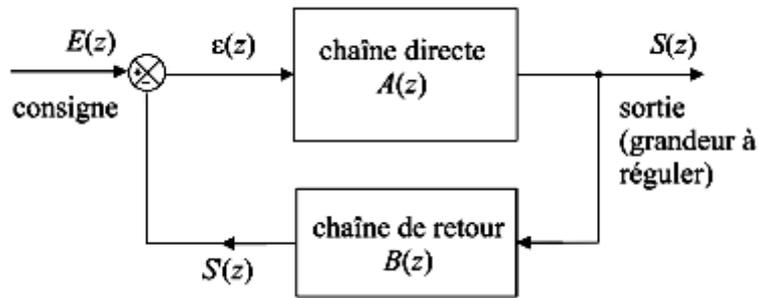


Figure.2.5 : Schéma de l'asservissement échantillonné attendu

2.2 STABILITÉ DES ASSERVISSEMENTS ÉCHANTILLONNÉS

2.2.1 Critère mathématique de stabilité

a) Énoncé du critère

Pour les systèmes à temps discret, la définition de la stabilité reste la même : à une entrée finie doit correspondre une sortie finie. Considérons un système échantillonné défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_q z^{-q}} = \frac{a_0 \prod_{i=1}^p (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{j=1}^q (1 - p_j z^{-1})}$$

Les z_i et les p_j sont respectivement les zéros et les pôles de la fonction de transfert.

Plaçons un échelon unité à l'entrée de ce système, soit : $E(z) = \frac{z}{z-1}$

On a alors :

$$S(z) = H(z)E(z) = \frac{a_0 \prod_{i=1}^p (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{j=1}^q (1 - p_j z^{-1})} \cdot \frac{z}{z-1}$$

D'après le théorème de la valeur finale, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-1}{z} S(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{a_0 \prod_{i=1}^p (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{j=1}^q (1 - p_j z^{-1})} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} H(z)$$

Or le système sera stable si et seulement si $s(k)$ tend vers une valeur finie.

La fonction de transfert peut naturellement être décomposée en éléments simples :

$$H(z) = \sum \frac{\alpha_j}{\left(1 - \frac{p_j}{z}\right)}$$

Et il faudra qu'aucun de ces termes ne tende vers l'infini lorsque $z \rightarrow 1$ pour assurer la stabilité du système. On sait par ailleurs que le domaine de convergence (donc d'existence) de la transformée en z est tel que $|z| > r$. Pour faire tendre z vers 1, il faut bien évidemment que le seuil de convergence r soit inférieur à 1. Le seul moyen de garantir qu'aucun terme de la décomposition en éléments simples ne diverge lorsque z tend vers 1 est donc de n'avoir que des pôles p_j dont le module sera strictement inférieur à 1.

Généralisons donc ce résultat :

Un système échantillonné est stable si et seulement si tous les pôles p_j de sa fonction de transfert sont tels que $|p_j| < 1$. On traduit souvent cette propriété par la proposition suivante qui concerne la position des pôles dans le plan complexe :

Un système est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert se trouvent tous à l'intérieur du cercle de rayon 1.

b) Exemple : stabilité en boucle fermée d'un système du premier ordre

On considère un système échantillonné de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ placé dans une boucle à retour unitaire (Figure 2.6), avec :

$$G(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}} = \frac{bz}{z - a}$$

Les paramètres b et a sont positifs. De plus, on supposera que $a < 1$.

Ce système correspond, en boucle ouverte, à l'équation de récurrence suivante :

$$s(k) = be(k) + as(k-1)$$

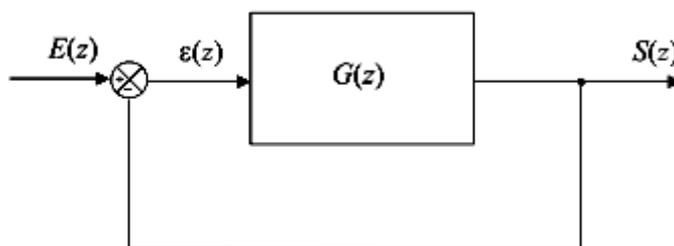


Figure.2.6 : Schéma d'un asservissement échantillonné à retour unitaire

Étudions sa stabilité en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{\frac{bz}{z - a}}{1 + \frac{bz}{z - a}} = \frac{bz}{(b+1)z - a}$$

Le système est stable en boucle fermée si l'unique pôle de cette fonction de transfert est inférieur à 1 :

$$\frac{a}{b+1} < 1$$

2.2.2 Critère algébrique de Jury

Pour les systèmes échantillonnés d'ordre élevé ou possédant des paramètres variables, on peut montrer qu'il est impossible d'utiliser le critère mathématique, et c'est pour cela qu'un critère algébrique, dit de Jury, avait été introduit. Le critère de Jury permet de diagnostiquer la stabilité d'un système sans avoir à calculer ses pôles. Il ressemble beaucoup au critère de Routh et est aussi simple à utiliser.

a) Énoncé du critère

Soit $H(z)$ la fonction de transfert en boucle fermée d'un système échantillonné asservi :

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_q z^{-q}}$$

En multipliant le dénominateur de cette fonction de transfert par z^q , on obtient :

$$H(z) = \frac{z^q (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p})}{b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + b_2 z^{q-2} + \dots + b_q} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Remarque : Il faut s'arranger pour que b_0 soit positif.

À partir de l'expression $D(z)$ du dénominateur de $H(z)$, ainsi placé sous la forme d'un polynôme en z , on construit un tableau similaire à celui du critère de Routh, de la manière suivante :

On place toute la suite de coefficients b_j dans un tableau, sur une première ligne, dans l'ordre des puissances de z décroissantes, puis, sur une deuxième ligne, on place les mêmes coefficients mais en sens inverse. On effectue ensuite un calcul pour créer une ligne supplémentaire de $q - 1$ valeurs c_j , avec :

$$c_j = b_0 b_j - b_q b_{q-j}$$

On dispose alors d'un tableau de trois lignes et on crée aussitôt une quatrième ligne avec la même suite de coefficients c_j , mais placée en sens inverse :

$$\begin{array}{cccccccc} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_q & & & \\ b_q & b_{q-1} & b_{q-2} & \dots & b_0 & & & \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{q-1} & & & \\ c_{q-1} & c_{q-2} & c_{q-3} & \dots & c_0 & & & \end{array}$$

La cinquième ligne est calculée à partir des deux lignes précédentes et cette fois, on calcule uniquement $q - 2$ valeurs d_j selon l'expression :

$$d_j = c_0 c_j - c_{q-1} c_{q-j-1}$$

Plutôt que de retenir cette expression, il est préférable de visualiser l'opération qui est faite, sur le tableau (figure 2.7).

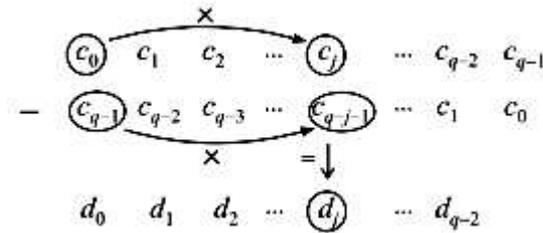


Figure.2.7 : Construction de la table de Jury

Une sixième ligne est automatiquement ajoutée au tableau en disposant les coefficients d_j en sens inverse. On itère le processus de calcul jusqu'à ce qu'il ne reste que 3 termes sur une ligne (bien noter qu'à chaque série de calculs, on crée un terme de moins qu'il n'y en a sur les deux lignes précédentes). Le tableau définitif doit comporter $2q - 3$ lignes. Le système est stable si toutes les conditions suivantes sont réunies simultanément :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \text{ si } n \text{ est impair, } D(-1) < 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ b_0 > |b_q| \\ |c_0| > |c_{q-1}| \\ |d_0| > |d_{q-2}| \\ \dots \\ |x_0| > |x_2| \end{array} \right.$$

Remarque : Il faut donc, en plus des conditions sur $D(1)$ et $D(-1)$, que sur chaque ligne créée de rang impair, la valeur absolue du premier terme soit inférieure à celle du dernier.

b) Exemple : stabilité d'un système du second ordre

Soit $H(z)$ la fonction de transfert en boucle fermée d'un système échantillonné asservi.

Soit :

$$H(z) = \frac{1}{az^2 + bz + c} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Les coefficients a , b et c sont supposés strictement positifs. Comme le système est d'ordre 2, une seule ligne suffit ($2q - 3 = 1$). Le tableau se limite donc à la liste des coefficients dans l'ordre des puissances décroissantes :

$$a \quad b \quad c$$

L'analyse de la table nous conduit immédiatement à la condition : $a > c$. Par ailleurs, on doit avoir :

$$\begin{aligned} D(1) > 0 &\Rightarrow a + b + c > 0 \\ D(-1) > 0 &\Rightarrow a - b + c > 0 \end{aligned}$$

En conclusion, le système est stable si :

$$\left\{ \begin{array}{l} a > c \\ a + b + c > 0 \\ a - b + c > 0 \end{array} \right.$$

2.2.3 Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la stabilité

a) Mise en évidence

Nous allons tenter, à partir d'un exemple simple, de montrer que la stabilité d'un système échantillonné peut être grandement influencée par le choix de la période d'échantillonnage. Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placé dans une boucle à retour unitaire avec :

$$G(p) = \frac{K}{1+Tp}$$

Si on se réfère à la table des équivalents Laplace $-z$ (fournie en annexe B), le système échantillonné asservi qui possédera le même fonctionnement aura pour fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{K \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}}\right)}{z - e^{-\frac{T_e}{T}}} \Rightarrow H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}}\right)}{z - e^{-\frac{T_e}{T}} + K \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}}\right)}$$

Remarque : Bien noter que l'on n'a pas le droit de déduire la fonction de transfert échantillonnée en boucle fermée à partir de la fonction de transfert continue en boucle fermée.

Alors que le système en temps continu $H(p)$ est toujours stable, le système échantillonné ne l'est pas toujours. En effet, $H(z)$ possède un pôle dont le module est susceptible d'être supérieur à 1.

$$\text{Ce pôle a pour expression : } p_1 = K \left(e^{-\frac{T_e}{T}} - 1 \right) + e^{-\frac{T_e}{T}}$$

Le système échantillonné sera stable si et seulement si :

$$\left| K \left(e^{-\frac{T_e}{T}} - 1 \right) + e^{-\frac{T_e}{T}} \right| < 1$$

On peut donc avoir :

$$K \left(e^{-\frac{T_e}{T}} - 1 \right) + e^{-\frac{T_e}{T}} < 1 \Rightarrow K > -1$$

Ce qui ne nous intéresse guère,

$$\text{Ou bien : } K - (1+K)e^{-\frac{T_e}{T}} < 1 \Rightarrow K < \frac{1+e^{-\frac{T_e}{T}}}{1+e^{\frac{T_e}{T}}}$$

Le système échantillonné peut donc être instable : pour une période d'échantillonnage donnée, il existe une limite supérieure du gain statique qui délimite le domaine stable. Si c'est le gain statique qui est fixé, on a :

$$K - (1+K)e^{-\frac{T_e}{T}} < 1 \Rightarrow -(1+K)e^{-\frac{T_e}{T}} < 1-K$$

$$e^{-\frac{T_e}{T}} > \frac{1-K}{1+K} \Rightarrow -\frac{T_e}{T} > \ln \frac{1-K}{1+K} \Rightarrow T_e < T \ln \frac{1-K}{1+K}$$

La période d'échantillonnage doit donc être inférieure à une valeur qui dépend des paramètres du système. Autrement dit la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à un certain seuil.

Remarque : Il s'agit là d'un résultat important : en automatique, la fréquence d'échantillonnage n'est pas uniquement dictée par le théorème de Shannon (d'ailleurs il n'est pas toujours possible de connaître *a priori* les spectres des signaux dans le système) mais aussi par les caractéristiques du système.

b) Choix de la fréquence d'échantillonnage

La règle traditionnellement adoptée par les automaticiens, en matière de choix de la fréquence d'échantillonnage consiste à évaluer la bande passante f_{pas} du système asservi et de choisir une fréquence d'échantillonnage telle que :

$$6f_{pas} < f_e < 25f_{pas}$$

On rappelle que la bande passante est définie comme la limite supérieure de la plage de fréquences pour lesquelles le gain est constant à 3 dB près.

2.3 ASSERVISSEMENTS CONTINUS COMMANDÉS OU CORRIGÉS EN TEMPS DISCRET

2.3.1 Définition

Les systèmes asservis comportent assez souvent à la fois des éléments fonctionnant à temps discret et d'autres qui fonctionnent à temps continu. Parmi ces systèmes, on rencontre notamment des asservissements de systèmes continus pour lesquels on envisage une correction par ordinateur. Dans ce cas, les signaux de consignes et de sortie sont continus ; seuls les signaux entrants et sortant du correcteur sont échantillonnés (Figure 2.8).

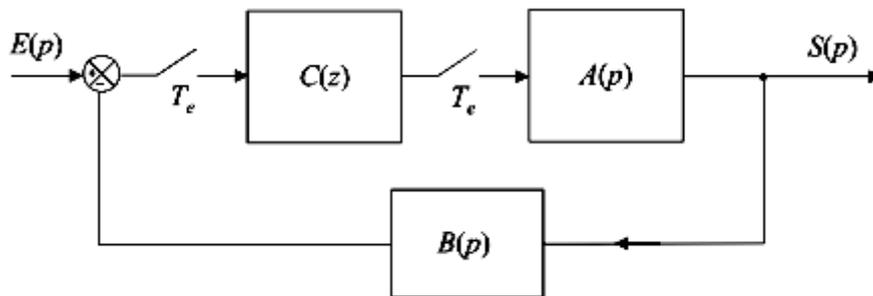


Figure.2.8 : Asservissement continu avec correction numérique

Dans d'autres cas, l'asservissement complet d'un système continu est piloté par un signal échantillonné (Figure 2.9).

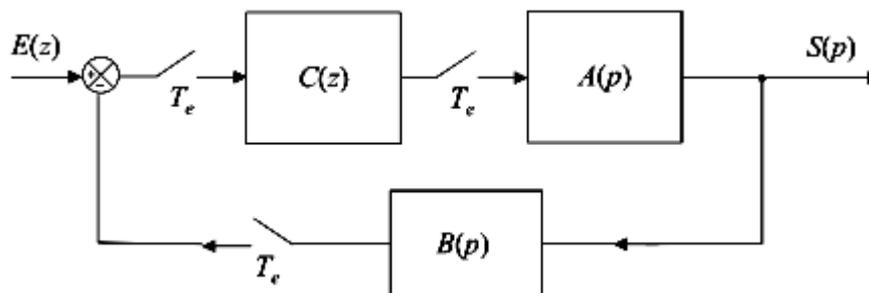


Figure.2.9 : Asservissement continu commandé par un signal échantillonné

2.3.2 Interfaçage entre un système discret et un système continu

Un problème subsiste dans les deux cas que nous venons de mentionner : la connexion d'un système échantillonné vers un système à temps continu n'est *a priori* pas possible. En effet, le signal délivré par le système $C(z)$ est un signal identique à celui présenté sur la Figure.2.10. Il s'agit même, en général, d'une suite de nombres délivrés sous forme binaire. Ce type de signal est bien sûr incompatible avec l'entrée d'un système à temps continu.

Pour retrouver un signal « admissible », il est nécessaire de reconverter la suite numérique en impulsions discrètes, au moyen d'un convertisseur numérique analogique, puis (et c'est cela qui transforme véritablement le signal en temps discret en signal continu) de procéder à un blocage du signal grâce à un système appelé bloqueur.

Le blocage consiste à maintenir la valeur de l'échantillon jusqu'à l'arrivée de l'échantillon suivant. Le signal $x^*(t)$, après blocage, devient le signal continu représenté sur la figure 2.11.

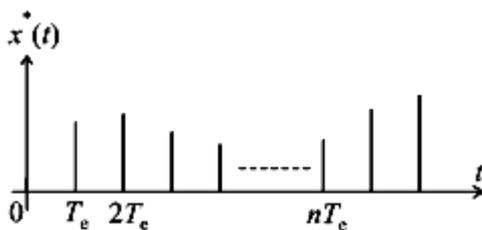


Fig. 2.10: Signal issu du correcteur

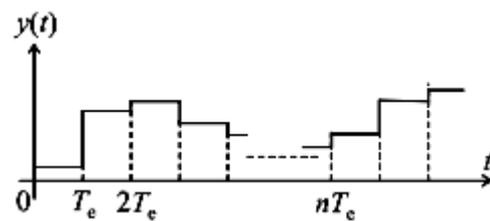


Fig. 2.11: Signal continu obtenu après blocage

On admettra qu'un bloqueur d'ordre 0 peut être modélisé par une fonction de transfert en temps continu égale à :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT_e}}{p}$$

2.3.3 Première méthode d'étude simple : recherche d'un système continu équivalent

La première méthode d'étude du système consiste à rechercher le système continu auquel il est équivalent. Prenons l'exemple du système représenté sur la figure 2.8. Le correcteur $C(z)$ possède sans aucun doute un équivalent en temps continu, soit $C(p)$.

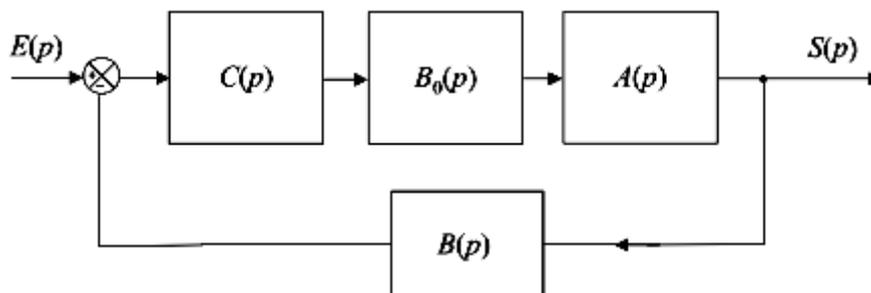


Figure.2.12 : Équivalence en temps continu du système

Nous pouvons alors proposer un schéma équivalent en continu, en veillant à ne pas oublier le bloqueur d'ordre 0 qui, dans le modèle en temps continu, effectue l'interfaçage entre le correcteur et le système à commander (figure 2.12).

2.3.4 Deuxième méthode d'étude simple : recherche d'un système discret équivalent

On peut également étudier le système en recherchant le système à temps discret auquel il est équivalent. Reprenons l'exemple du système représenté sur la figure 2.8. Soit $A(z)$ et $B(z)$ les équivalents en temps discrets des fonctions de transfert $A(p)$ et $B(p)$.

Nous pouvons immédiatement proposer le schéma équivalent en temps continu (figure 2.13), en veillant, surtout, à ne pas y inclure le bloqueur d'ordre 0 qui, dans le modèle en temps discret, n'a aucune raison d'être.

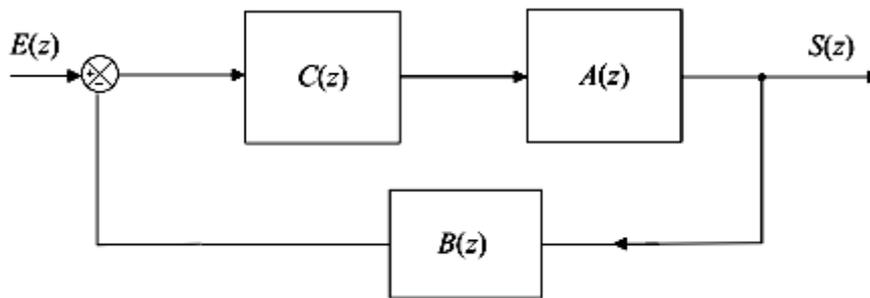


Figure.2.13 : Équivalence en temps discret du système

2.4 PRÉCISION DES ASSERVISSEMENTS ÉCHANTILLONNÉS

2.4.1 Erreurs de position et de vitesse

On définit, pour les systèmes à temps discret, les mêmes performances que pour les systèmes à temps continu. Il en est ainsi de la précision des systèmes qui est ici, toujours définie par les notions d'erreurs de position et de vitesse.

Considérons un système échantillonné asservi de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$, placé dans une boucle à retour unitaire et représenté sur la figure 2.14.

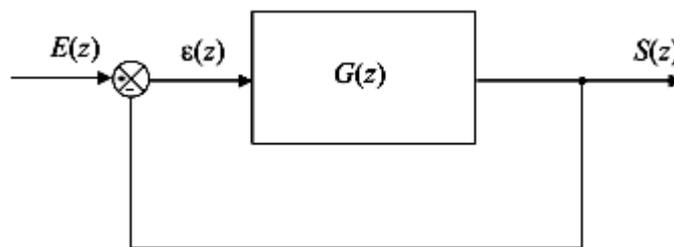


Figure.2.14 : Schéma d'un asservissement échantillonné à retour unitaire

On définit l'erreur de position ε_p par : $\varepsilon_p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(k)$, pour une entrée en échelon unité

En appliquant le théorème de la valeur finale, on obtient :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \varepsilon(z) \right]$$

Or : $\varepsilon(z) = E(z) - S(z) = E(z) - G(z)\varepsilon(z)$ d'où : $\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1+G(z)}$

On a donc :
$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1+G(z)} \right]$$

Comme le signal d'entrée est un échelon unité, on a :

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \Rightarrow \varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1+G(z)} \right]$$

On définit également l'erreur de vitesse ε_v par : $\varepsilon_v = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(k)$ pour une entrée en rampe

On a toujours :
$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1+G(z)} \right]$$

Avec cette fois :

$$E(z) = \frac{zT_e}{(z-1)^2} \Rightarrow \varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{(z-1)[1+G(z)]} \right]$$

2.4.2 Précision d'un système échantillonné du premier ordre

On considère un système échantillonné de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ placé dans une boucle à retour unitaire (figure 2.13), avec :

$$G(z) = \frac{b}{1-az^{-1}} = \frac{bz}{z-a} \text{ avec } b > 0 \text{ et } 0 < a \leq 1$$

Nous savons déjà (paragraphe 2.2.1 – b) que le système est stable en boucle fermée si l'unique pôle de la fonction de transfert en boucle fermée est inférieur à 1.

Soit :
$$\frac{a}{b+1} < 1$$

a) Calcul de l'erreur de position

L'erreur de position de ce système asservi a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1+G(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + \frac{b}{1-az^{-1}}} \right]$$

Soit :
$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + \frac{bz}{z-a}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-a}{(b+1)z-a} \right] = \frac{1-a}{b+1-a}$$

Remarque : Compte tenu de la condition de stabilité, le dénominateur de cette expression ne peut être nul.

Cette erreur de position est nulle, autrement dit le système est parfaitement précis en boucle fermée, si $a = 1$, donc si la fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ possède un pôle égale à 1.

b) Calcul de l'erreur de vitesse

L'erreur de vitesse du système asservi a pour expression :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{(z-1) + \left[1 + \frac{bz}{z-a} \right]} \right]$$

Soit :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e(z-a)}{(z-1)[z(1+b)-a]} \right] \rightarrow \infty$$

L'erreur de vitesse d'un système du premier ordre placé dans une boucle d'asservissement est donc infini, sauf si $a = 1$, auquel cas :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e(z-1)}{(z-1)[z(1+b)-1]} \right] = \frac{T_e}{b}$$

c) Généralisation

La présence d'un pôle égal à 1 dans la fonction de transfert en boucle ouverte assure donc une bonne précision statique mais n'assure pas une bonne précision dynamique. Considérons à présent un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ quelconque de la forme :

$$G(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^n} \cdot A(z)$$

Un tel système possède n pôles égaux à 1. On aussi dit que la fonction de transfert en boucle ouverte est constituée, notamment, de n intégrateurs, étant donné que la forme $\frac{1}{1-z^{-1}}$ correspond à une constante multiplicative près à l'intégration $\frac{1}{p}$.

L'erreur de position de ce système en boucle fermée a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1+G(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^n}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{(z-1)^n}{(z-1)^n + z^n A(z)} \right]$$

Quelle que soit la valeur de n supérieure ou égale à 1 : $\varepsilon_p = 0$.

La présence d'au moins un intégrateur dans la fonction de transfert en boucle ouverte assure donc bien la nullité de l'erreur statique.

L'erreur de vitesse du système en boucle fermée a pour expression :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{(z-1)[1+G(z)]} \right] = \frac{T_e}{\lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) + \frac{(z-1)A(z)}{(1-z^{-1})^n} \right]}$$

$$\text{Soit : } \varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e (z-1)^n}{(z-1) \left[(z-1)^n + z^n A(z) \right]} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e (z-1)^{n-1}}{\left[(z-1)^n + z^n A(z) \right]} \right]$$

$$\text{Si } n = 1 : \varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{\left[(z-1) + z^n A(z) \right]} \right] = \frac{T_e}{A(1)} \neq 0$$

$$\text{Si } n \geq 2 \varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e (z-1)^{n-1}}{\left[(z-1)^n + z^n A(z) \right]} \right] = \frac{T_e}{A(1)} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^{n-1} = 0$$

En conclusion, la présence d'un intégrateur dans la fonction de transfert en boucle ouverte assure une erreur de vitesse finie d'autant plus faible que la période d'échantillonnage est faible. La présence d'au moins deux intégrateurs assure la nullité de l'erreur de vitesse.

2.5 PERFORMANCES DYNAMIQUES D'UN SYSTÈME ÉCHANTILLONNÉ

Tout comme l'étude des systèmes à temps continu conduit à mettre en évidence des performances en boucle fermée telles que rapidité et limitation du dépassement, nous allons à présent nous intéresser à ces performances dynamiques dans le cas des systèmes à temps discret.

2.5.1 Fonction de transfert échantillonnée équivalente à un système du second ordre

On considère un système à temps continu du second ordre, caractérisé en boucle ouverte, par une fonction de transfert $G(p)$ telle que :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Nous nous limiterons à l'étude du cas $\zeta < 1$, pour mettre en évidence les paramètres liés au temps de montée et au dépassement. Par ailleurs, nous savons déjà, que cette fonction possède dans ce cas deux pôles complexes conjugués :

$$p_1 = -\omega_n \left[\xi - j\sqrt{1-\xi^2} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[\xi + j\sqrt{1-\xi^2} \right]$$

$$\text{Soit : } G(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = K\omega_n^2 \cdot \frac{1}{(p-p_1)} \cdot \frac{1}{(p-p_2)}$$

Calculons à présent, à l'aide de la table d'équivalence fournie en annexe B, la fonction de transfert en z équivalente à $G(p)$:

$$G(z) = K\omega_n^2 \cdot \left[\left(-\frac{1}{p_1} \right) \frac{1-e^{p_1 T_e}}{z-e^{p_1 T_e}} \right] \cdot \left[\left(-\frac{1}{p_2} \right) \frac{1-e^{p_2 T_e}}{z-e^{p_2 T_e}} \right]$$

$$\text{Comme : } p_1 p_2 = \omega_n^2$$

On obtient :

$$G(z) = \frac{K(1 - e^{p_1 T_e})(1 - e^{p_2 T_e})}{(z - e^{p_1 T_e})(z - e^{p_2 T_e})}$$

Notons au passage que les deux pôles de la fonction de transfert en z sont $e^{p_1 T_e}$ et $e^{p_2 T_e}$ et remplaçons pour finir p_1 et p_2 par leurs expressions :

$$G(z) = \frac{K \left(1 + e^{-2\xi\omega_n T_e} - 2e^{-\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1 - \xi^2} \right)}{z^2 - 2ze^{-\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1 - \xi^2} + e^{-2\xi\omega_n T_e}}$$

2.5.2 Prédiction des performances dynamiques

a) Principe

L'une des méthodes les plus simples consiste à rechercher l'équivalent en temps continu de la boucle d'asservissement en temps discret en prenant soin de ne pas oublier les bloqueurs d'ordre 0, si nécessaires. On évalue alors les performances dynamiques de ce système en temps continu en assimilant son fonctionnement à celui d'un système du second ordre.

Pour simplifier les calculs, on prend l'habitude d'effectuer une approximation sur la fonction de transfert du bloqueur d'ordre 0, approximation qui apparaît comme raisonnable si la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{pT_e}}{p} \approx e^{-\frac{pT_e}{2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{T_e p}{2}}$$

b) Exemple

On considère le système échantillonné asservi représenté sur la figure 12.15 et soumis à un échelon unitaire ; la période d'échantillonnage est réglée sur $T_e = 0,2$ s.

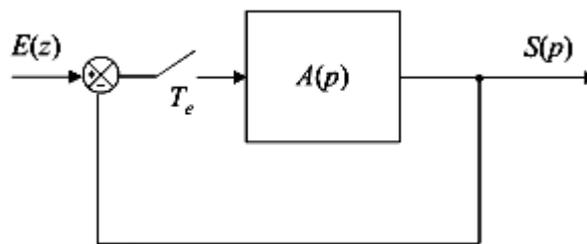


Figure.2.15 : Asservissement continu commandé par un signal échantillonné

On donne :

$$A(p) = \frac{4}{1 + p}$$

Recherchons l'équivalent en temps continu de cette boucle d'asservissement en temps discret: un bloqueur d'ordre 0 est nécessaire pour assurer la commande du système $A(p)$. On obtient alors le schéma équivalent de la figure 2.16.

La fonction de transfert en boucle ouverte de ce système en temps continu a pour expression :

$$G(p) = \frac{4}{\left(1 + \frac{T_e p}{2}\right)(1+p)} = \frac{4}{\left(1 + \frac{p}{10}\right)(1+p)}$$

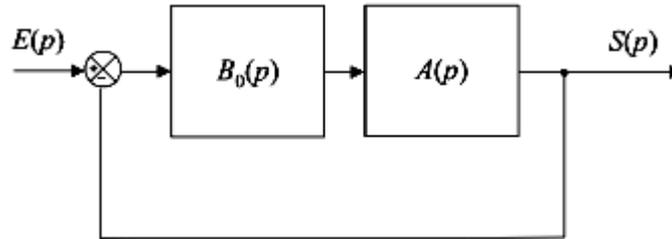


Figure.12.16 : Équivalence du système en temps continu

Calculons la pulsation de coupure à 0 dB et la marge de phase de ce système :

$$G(\omega) = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2} \sqrt{1+\frac{\omega^2}{100}}}$$

$$G(\omega) = 1 \Leftrightarrow (1+\omega^2) \left(1 + \frac{\omega^2}{100}\right) = 16 \Leftrightarrow \frac{\omega^4}{100} + \frac{101\omega^2}{100} - 15 = 0$$

La seule solution réelle positive de cette équation est : $\omega_{c0} = 3,6 \text{ rad/s}$

Par conséquent, en considérant les relations approchées à propos des performances des systèmes à temps continu, nous pouvons en déduire une estimation du temps de montée en boucle fermée :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} \approx 0,8s$$

Calculons à présent la marge de phase :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - \arctan \frac{\omega_{c0}}{10} - \arctan \omega_{c0}$$

Soit :
$$\Delta\varphi = 85^\circ \Rightarrow \xi_{BF} \approx 0,85$$

Ce coefficient d'amortissement en boucle fermée correspond à un dépassement de 0,6%, autrement dit, le système devrait présenter un dépassement imperceptible.

En conclusion, nous considérerons que le système échantillonné initial possède pour performances dynamiques :

$$t_m \approx 0,8s$$

$$dep \approx 0$$

Cette étude a par ailleurs permis de démontrer que le dispositif était caractérisé par une marge de phase relativement importante, montrant ainsi que le système est très stable en boucle fermée.

c) Validation des résultats obtenus

Considérons, pour valider les résultats obtenus précédemment, l'équivalent en z de la boucle d'asservissement étudiée (figure 2.17).

D'après la table d'équivalence :

$$A(z) = \frac{4(1 - e^{-T_e})}{(z - e^{-T_e})}$$

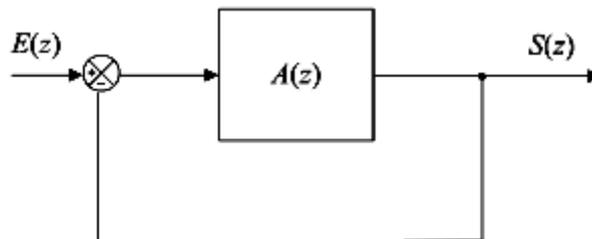


Figure.12.17 : Modèle à temps discret de la boucle d'asservissement

La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)} = \frac{4(1 - e^{-T_e})}{(z - e^{-T_e}) + 4(1 - e^{-T_e})}$$

Soit :

$$H(z) = \frac{0,72}{z - 0,1}$$

Or :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0,72}{z - 0,1} \Rightarrow (z - 0,1)S(z) = 0,72E(z)$$

Soit :

$$(z - 0,1)S(z) = 0,72E(z)$$

Ce qui correspond à l'équation de récurrence suivante :

$$s(k) = 0,1s(k-1) + 0,72e(k-1)$$

Le système étant commandé par un échelon, la suite $e(k)$ est connue et cette équation nous permet de calculer, échantillon par échantillon, les différentes valeurs de la suite $s(k)$ (tab.2.1).

t	0	0,2s	0,4s	0,6s	0,6s	1,0s	1,2s
$e(k)$	1	1	1	1	1	1	1
$s(k)$	0	0,720	0,792	0,799	0,800	0,800	0,800

Tableau.2.1 : Simulation de la suite d'échantillons

Nous y remarquons l'absence de dépassement perceptible (ce qui est tout à fait conforme au système continu équivalent) et pouvons y mesurer le temps de montée qui est tout à fait conforme aux prédictions calculées à partir de notre modèle. Nous pouvons également vérifier la valeur de l'erreur de position prévue par notre modèle :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + A(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - e^{-T_e}}{z - e^{-T_e} + 4(1 - e^{-T_e})}$$

Soit :

$$\varepsilon_p = \frac{1 - 0,82}{1 - 0,82 + 4(1 - 0,82)} = 0,2 = 20\%$$