MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

FACULTE DE SCIENCE DE L'INGENIEUR

Université Badji Mokhtar Annaba

Département d'électrotechnique

Support de cours

De théorie du signal

Rédigé par :

Merabet. Leila

Enseignante au département d'électrotechnique

Objectifs : Acquérir les notions de base et les connaissances théoriques élémentaires pour ;

• Décrire et représenter les signaux
• Comprendre le principe et les limites des méthodes de traitement
• mettre en œuvre des méthodes de traitement simples

Connaissances préalables recommandées : Cours de mathématique de base.

Contenu de la matière :

Chapitre 1 : Généralités sur les signaux
Chapitre 2 : Séries de Fourier
Chapitre 3 : Transformée de Fourier
Chapitre 4 : produit de convolution et corrélation
Chapitre 5 : Transformée de Laplace et fonction de transfert
Chapitre 6 : Systèmes échantillonnage et transformée en Z

Mode d'évaluation : 40% ; Examen final : 60%

CHAPITRE 1
GENERALITEE SUR LES SIGNAUX

1. Définition

Le signal : C'est une entité (électrique, onde acoustique ou lumineuse, suite de nombres…) engendrée par un phénomène physique qui sert à véhiculer une information (musique, parole, image, température…) via un canal.

Un signal expérimental est souvent électrique (tension ou courant en fonction du temps) délivré par un capteur ou un appareil électrique.

Exemples de signaux :

- Onde acoustique, parole, musique,…
- Signaux biologiques EEG, ECG.
- Tensions aux bornes d'un condensateur en charge
- Signaux géophysiques ; vibrations sismiques
- Finances, cours de la bourse
- Débit de la seine
- Image Vidéos, etc…

Le bruit : C'est un phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal utile.

Le canal de transmission : C'est le support du signal. Il constitue une liaison entre émetteur d'information et un récepteur. Il occasionne des dégradations telles que : le retard, la distorsion, l'adjonction de bruit.

La théorie du signal : Elle s'intéresse à l'étude mathématique des caractéristiques des signaux.

Le traitement du signal : C'est la manipulation de l'information afin d'extraire le maximum d'informations utiles d'un signal perturbé par le bruit, suivie d'une analyse afin d'extraire un caractère particulier du signal.

Domaine d'utilisation

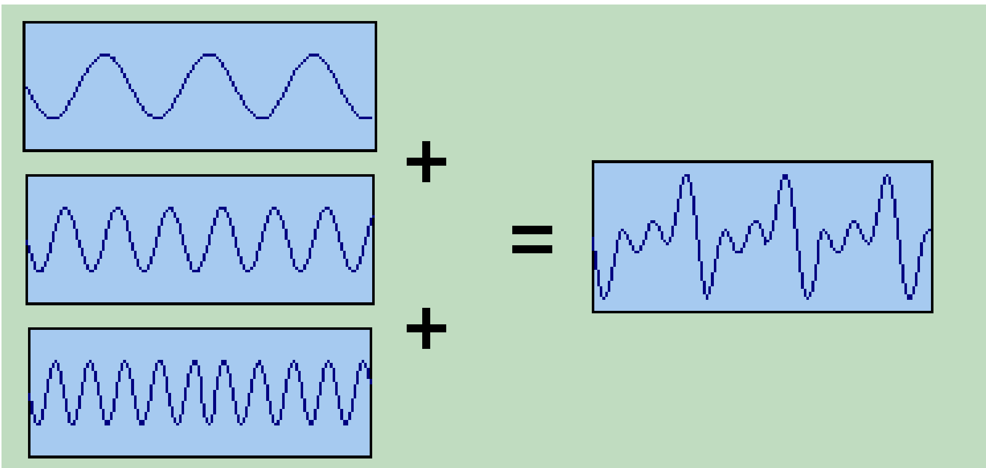
- Télécommunication
- Technique de mesures

- Etudes de vibrations mécaniques
- Surveillance de processus industriels
- Radar
- Acoustique
- Reconnaissance de formes
- Traitement d'images
- Analyses biomédicales
- Géophysique
- Etc…

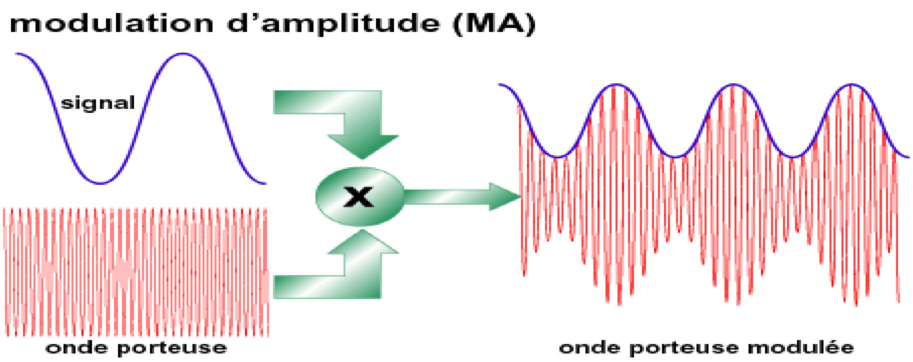
Signal causal :
Un signal causal est tout signal nul pour toutes les valeurs négatives du temps, on dit qu'un système est causal si sa réponse est nulle pour $t < 0$.

2. Fonctions du traitement du signal :

a) Synthèse : création de signaux par combinaison de signaux élémentaires

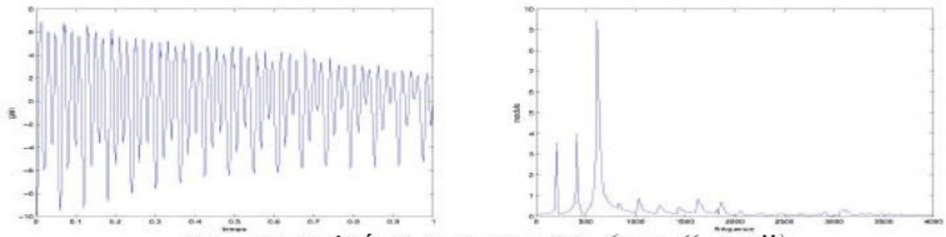


b) Modulation : adaptation du signal au canal de transmission

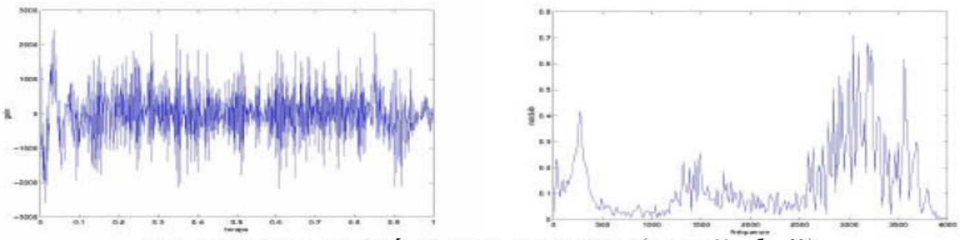


c) **Analyser :** Interpretation des signaux

- Détection : isoler les composantes utiles d'un signal complexe, extraction du signal d'un bruit de fond
- Identification : classement du signal (identification d'une pathologie sur un signal ECG, reconnaissance de la parole, etc.)



un son voisé et son spectre (son " eu ")



un son non voisé et son spectre (son " ch ")

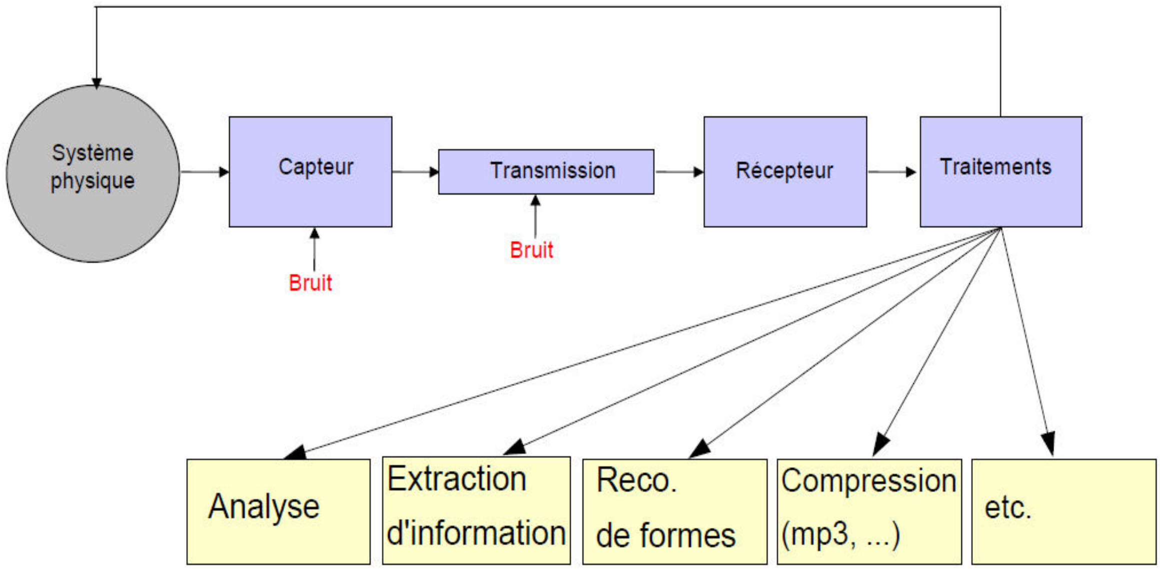
Transformer : adapter un signal aux besoins

- Filtrage : élimination de certaines composantes

– Détection de craquements sur un enregistrement,
– Détection de bruit sur une image,
– Annulation d'écho, etc.

- Codage/compression (Jpeg, mp3, mpeg4, etc.)

3. Chaine de traitement de l'information et le traitement du signal :



4. Classification des signaux

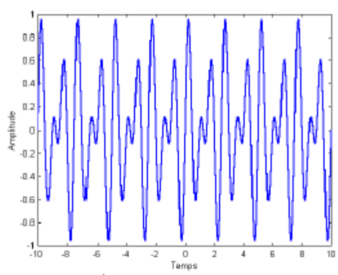
On peut envisager plusieurs modes de classification pour les signaux suivant leurs propriétés.

4.1. Classification phénoménologique

On considère la nature de l'évolution du signal en fonction du temps. Il apparaît deux types de signaux :

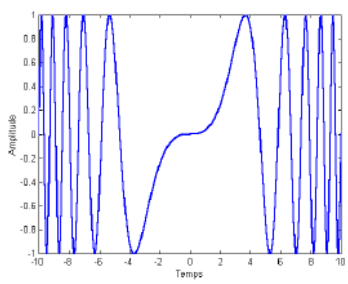
- **Les signaux déterministes :** ou signaux certains, leur évolution en fonction du temps peut être parfaitement modélisé par une description mathématique ou graphyque. On retrouve dans cette classe les signaux **périodiques, apériodisues, les signaux transitoires (à support borné ou durée limitée), etc…**

▪ périodiques



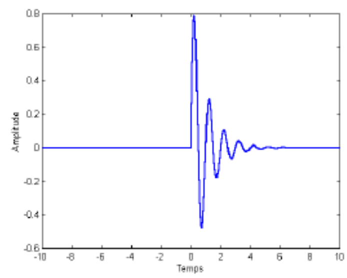
$\exists\, T / x(t) = x(t + kT)$

▪ apériodiques



support non borné

▪ transitoire



support borné

- Signal réel

C'est un signal représentant une grandeur physique. Son modèle mathematique est une fonction réelle. Ex. : tension aux bornes d'un C

- **Les signaux aléatoires (stochastiques) :**

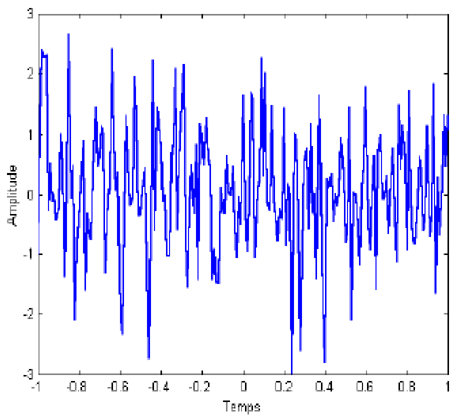
Signaux dont l'évolution temporelle est imprévisible et dont on ne peut pas prédire la valeur a un temps *t*.
La description est basée sur les propriétés statistiques des signaux (moyenne, variance, loi de probabilité, …)

Signaux aléatoires stationnaires

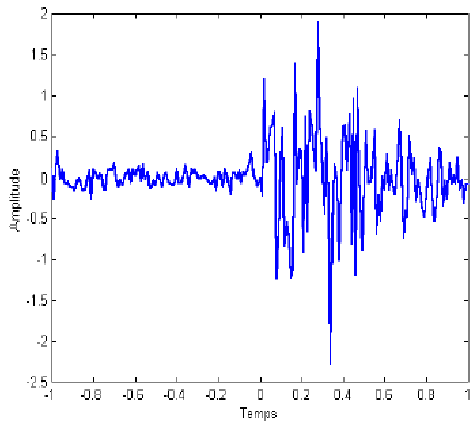
Stationnaire si les caractéristiques statistiques ne varient pas au cours du temps.

Exemple résultat d'un jet de de lance toutes les secondes (moyenne=3.5, écart type :1.87)

- stationnaires



- Non-stationnaires



4.2 Classification énergétique

Soit un signal *x*(*t*) défini sur $]-\infty, +\infty[$, et T_0 un intervalle de temps

- Energie de *x(t)*

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{ou} \quad E = \lim_{T_0 \to +\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- Puissance moyenne de *x(t)*

$$P = \lim_{T_0 \to +\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- ➢ Homogène à E/t
- Pour le cas des signaux périodiques de période T

$$p = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

On distingue :

- **Les signaux à énergie finie :** il possède une puissance moyenne nulle et une énergie finie. C'est le cas des signaux représentant une grandeur physique. Signaux transitoires à support borné.

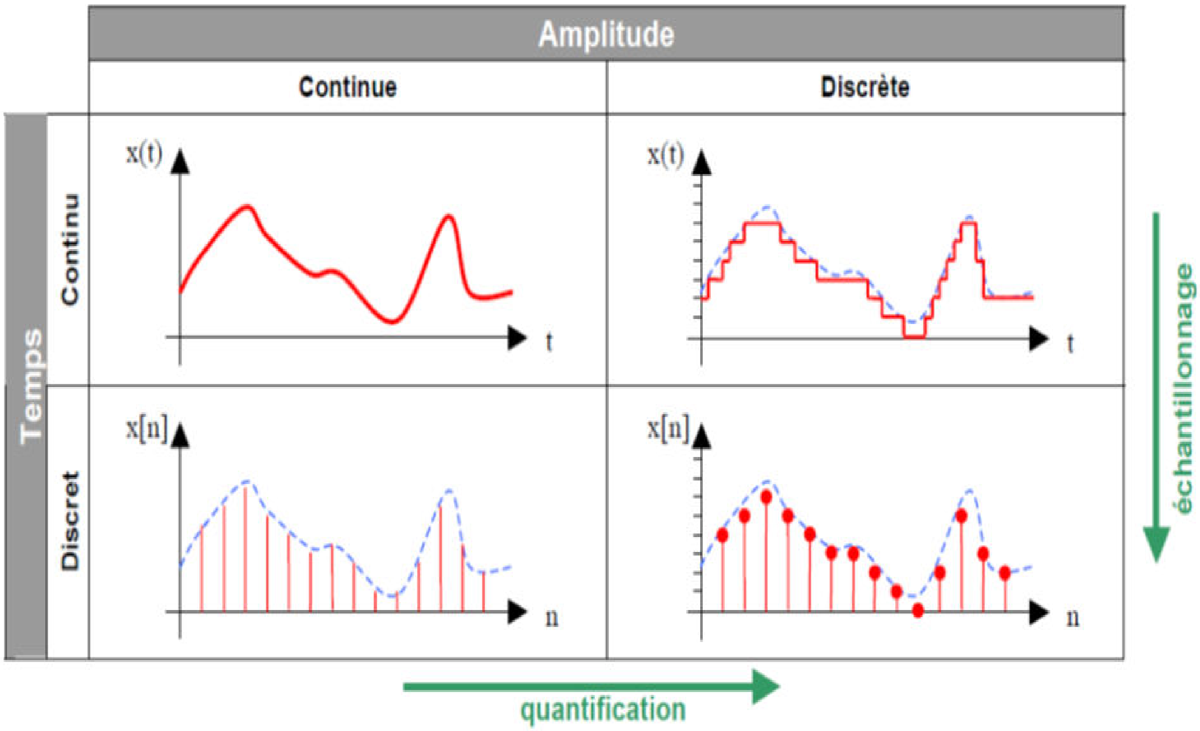
- **Les signaux à puissance moyenne finie :** il possède une énergie infinie et sont donc physiquement irréalisable. Cas des signaux périodiques.

Notion valable pour les signaux aléatoires et déterministes.

4.3 Classification morphologique

Selon que le signal *x(t)* ou la variable t est continue ou discrète ($t_e=kT$) on distingue quatre types de signaux :

- **Les signaux analogiques** dont l'amplitude et le temps sont continus
- **Les signaux quantifiés** dont l'amplitude est discrète et le temps continu
- **Les signaux échantillonnés** dont l'amplitude est continue et le temps discret
- **Les signaux numériques** dont l'amplitude et le temps sont discrets



2.4 Classification spectrale

L'analyse spectrale d'un signal (ou la répartition énergétique en fonction de la fréquence) conduit à une classification

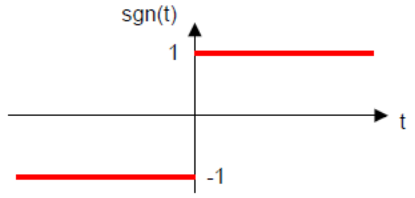
Signaux de basses fréquences
Signaux de hautes fréquences
Signaux à bande étroite
Signaux à large bande
Exemples :

3. Signaux particuliers

Afin de simplifier les opérations ainsi que les formules obtenues, certains signaux fréquemment rencontrés en traitement du signal disposent d'une modélisation propre.

3.1 Fonction signe

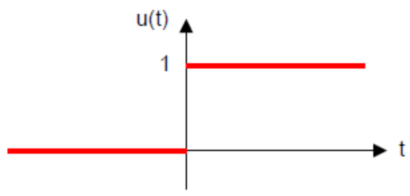
$$sgn(t) = \begin{cases} -1 \quad pour\ t < 0 \\ +1\ pour\ t > 0 \end{cases}$$



Par convention, on admet pour valeur à l'origine : $sgn\,(t) = 0$ pour $t = 0$.

3.2 Fonction échelon

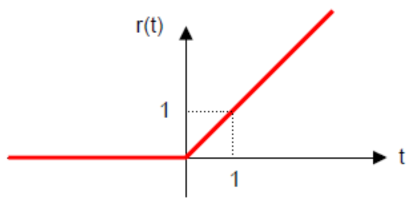
$$u(t) = \begin{cases} 0 \quad pour\ t < 0 \\ +1\ pour\ t > 0 \end{cases}$$



3.3 Fonction rampe

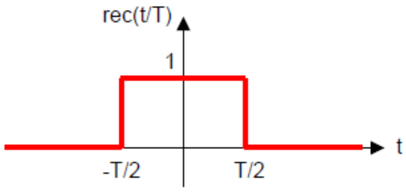
$$r(t) = t.u(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$



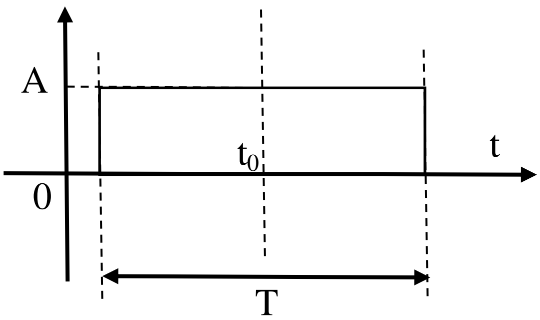
3.4 Fonction rectangulaire

$$rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 \quad pour \left|\frac{t}{T}\right| < \frac{1}{2} \\ 0 \; pour \left|\frac{t}{T}\right| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Remarque : La forme générale d'une porte de centre t_0 et de largeur T est :

$$x(t) = A.Rect\frac{(t - t_0)}{T}$$



Avec :
A : Amplitude
t_0 : Centre
T : La largeur

3.5 Impulsion de Dirac

- **Définition**

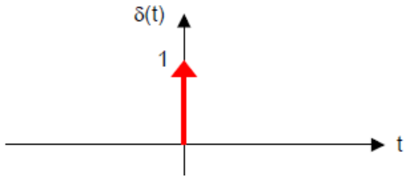
Si φ est une fonction, la distribution de Dirac ou impulsion de Dirac est définie par :

$$\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t).\delta(t)dt = \varphi(0)$$

=> Dirac appliqué a une fonction = la valeur de la fonction en 0

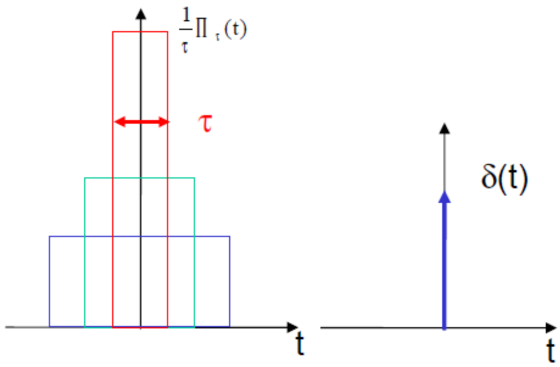
Remarque : il n'existe pas de fonction δ vérifiant cette propriété ; cependant pour des raisons de commodités, on la note souvent comme une fonction de t : δ(t), qu'on représente :

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t \neq 0 \end{cases}$$



- On la schématise par le symbole ↑. Le **1** marqué sur la flèche pleine représente l'aire ou l'énergie de cette impulsion (et non la hauteur de l'impulsion).
- Autres définitions :
- On peut encore considérer comme la dérivée de la fonction échelon : $\delta\,(t) = \frac{du(t)}{dt}$
- A partir du signal porte :

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} rect_{\tau}\,(t)$$



- Propriétés :

Intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\,\delta(t)dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

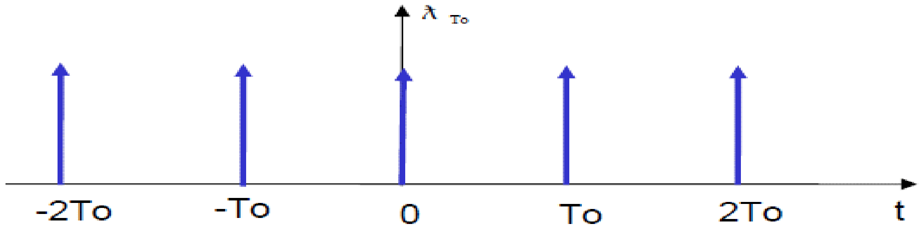
Produit :

$$x(t).\,\delta(t) = x(0).\,\delta(t) = x(0)$$
$$x(t).\,\delta(t - t_0) = x(t_0).\,\delta(t - t_0) = x(t_0)$$

3.6 Peigne de Dirac

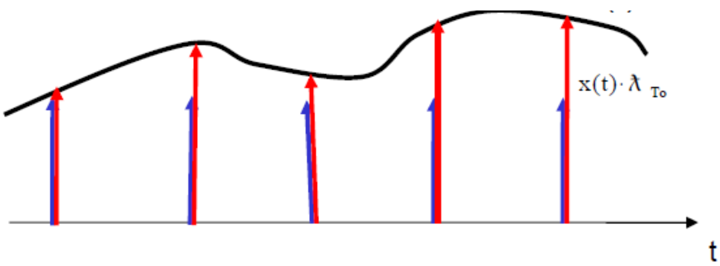
C'est une somme infinie d'impulsions de Dirac régulièrement espacées de T_0.

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k \to -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



➢ Propriété

$$x(t).\delta_{T_0}(t) = \sum_{k \to -\infty}^{+\infty} x(kT_0).\delta(t - kT_0)$$



Echantillonnage de la fonction $x(t)$

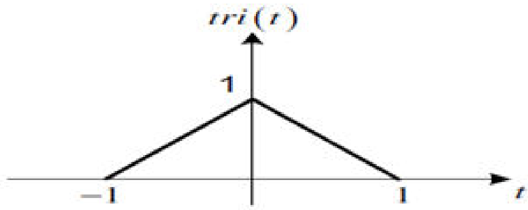
Cette suite est parfois appelée train d'impulsions ou fonction d'échantillonnage. Ce type de signal est principalement utilisé en échantillonnage.

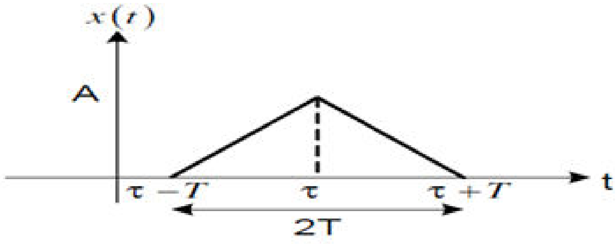
3.7 Fonction triangulaire

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 0 \\ 0 & |t| > 0 \end{cases}$$

D'une manière générale

$$x(t) = A.tri(\frac{t - \tau}{2T})$$



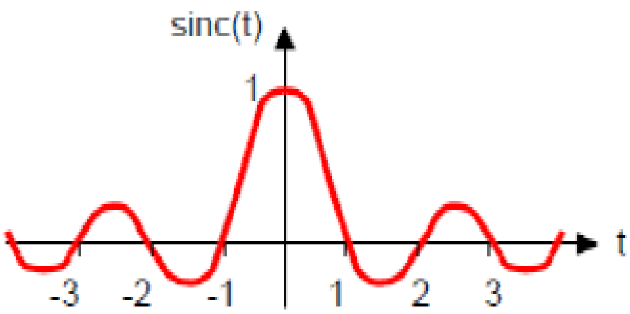


A : Amplitude
τ : Centre de symétrie
2T : La largeur

3.8 Fonction sinus cardinal

La fonction $sinc(t)$ est défini par :

$$sinc(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$$



Cette fonction joue un rôle très important en traitement du signal.