CHAPITRE 2
SERIES DE FOURIER

1. Définition de la série de Fourier

La série de Fourier d'un signal réel x(t) périodique de période T=1/f_0 est la décomposition du signal en valeur moyenne, somme de termes en cosinus et somme de termes en sinus tel que:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi f_0 t)$$

f_0 fréquence fondamentale du signal
$\frac{a_0}{2}$ est la valeur moyenne ou composante continue
avec :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(2\pi n f_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(2\pi n f_0 t)\,dt$$

Si le signal est pair b_n=0

Si le signal est impair a_0=$a_n = 0$

2. Série de Fourier en cosinus

Cette série en cosinus s'écrit sous la forme :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t) + \alpha_n)$$

Avec

$$A_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$$

$$\alpha_n = arctang\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

La représentation spectrale qui lui est associée porte le nom de spectre unilatéral

3. Série de Fourier en complexe

La série de Fourier en cosinus peut être transformé en série de Fourier complexe :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(jn)\, e^{j2\pi f_0 nt}$$

Avec : $X(jn) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{j2\pi f_0 nt}dt$

La représentation spectrale qui lui est associée porte le nom de spectre bilatéral

4. Relation entre les trois représentations de Fourier

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = X(0)$$

$$A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$$

$$|X(jn)| = \frac{A_n}{2}$$

5. Théorème de la puissance ou de Parseval

La définition de la puissance moyenne est la suivante :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 dt = X_{eff}^2$$

Elle s'exprime V^2 ou en A^2 selon que le signal est en tension ou en courant

Le théorème de Parseval montre que la puissance normalisée d'un signal peu se calculer aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel.

$$\boldsymbol{P = X_{eff}^2 = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 = p_{dc} + p_{ac}}$$

$$\boldsymbol{= X(0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} (2|X(jn)|)^2}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{X(jn)}|^{\boldsymbol{2}}$$