CHAPITRE 3
TRANSFORMEE DE FOURIER

1. **Définition** : soit un signal *x(t)*, sa TF est une fonction complexe de la variable réelle *f* définie par :

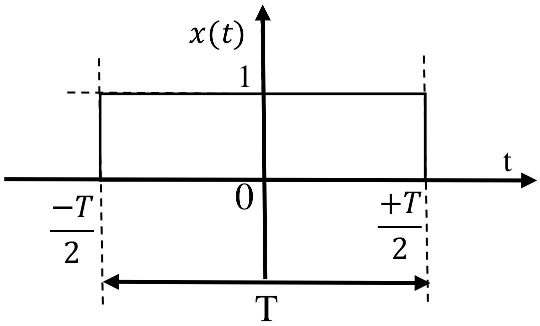
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$

X(f) est la superposition d'une infinité de raies qui s'étendent dans le domaine fréquentiel, de -∞, +∞.

Remarque *: La TF de x(t) existe si l'intégrale de x(t) est une fonction bornée*

2. **Exemple**

Soit la fonction *rect* ou porte ; $x(t) = rect(\frac{t}{T})$



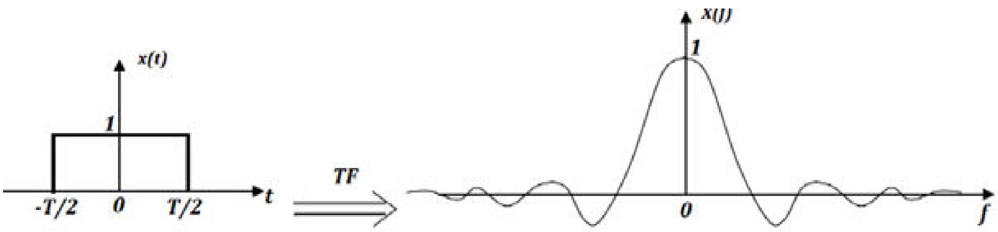
Calculer sa transformer de Fourier

On a : $x(t) = \begin{cases} 1 & si\ t\epsilon \left[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = X(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{-1}{j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f t}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{\pi f}\left(\frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi f}\sin(\pi f T) = T\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = Tsinc(fT)$$



3. Propriétés de la TF

Soit deux fonctions x(t) et y(t) ayant pour TF, X(f) et Y(f) respectivement : on pout vérifier les propriétés suivantes :

- **Linéarité** : $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(f) + bY(f)$
- **Parité** : La TF conserve la parité

x(t)	*X(f)*
Réelle paire	*Réelle paire*
Réelle impaire	*Imaginaire impaire*
Imaginaire paire	*Imaginaire paire*
Imaginaire impaire	*Réelle impaire*

- **Complexe conjugué** :$x^*(t) \leftrightarrow x^*(-f)$

- **Changement d'échelle sur t** : $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X(\frac{f}{a})$

- **Translation sur t (théorème de retard):** Le décalage d'une fonction original correspond à la multiplication de la transformée par un opérateur de rotation.

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi t_0}$$

- **Translation sur f ou modulation** : $x(t)e^{-j2\pi f_0} \leftrightarrow X(f - f_0)$

Dérivation par rapport à t :

$$\frac{dx^n(t)}{dt^n} \leftrightarrow (-j2\pi f)^n X(f)$$

- **Intégration par rapport à t** :

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) \;\; si \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, d\tau = 0$$

- **Dualité de la TF**

Si $x(t) \leftrightarrow X(f)$

Alors ; $X(t) \leftrightarrow x(-f)$

- **Symétrie dans le cas des signaux réels**

  Si $x(t)$ est un signal réel alors ; $X(f) = X(-f)$, donc :

  $$|X(f)| = |X(-f)| \; et \; \boldsymbol{\varphi(f) = -\varphi(-f)}$$

  Le spectre d'amplitude est une fonction paire et le spectre d'argument est impair

- **Symétrie dans le cas des signaux imaginaires purs**

  Si $x(t)$ est un signal imaginaire pur alors ;$X(f) = -X(-f)$

	s(t)	**S(F)**
Linéarité	$\alpha.s(t) + \beta.r(t)$	$\alpha.S(f) + \beta.R(f)$
Translation	$s(t-t_0)$	$e^{-2j\pi f t_0} S(f)$
	$e^{2j\pi f_0 t} s(t)$	$S(f-f_0)$
Conjugaison	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
Dérivation	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n S(f)$
Dilatation	$s(at)$ avec $a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} S(\frac{f}{a})$
Convolution	$s(t) * r(t)$	$S(f) \cdot R(f)$
	$s(t) \cdot r(t)$	$S(f) * R(f)$
Dualité	S(t)	s(-f)

1. Transformée de Fourier usuelles :

$x(t)$	$X(f)$
1	δ(f)
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
Cosinus $cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
Sinus $sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
Signe $sgn(t)=\frac{t}{\lvert t\rvert}$	$\begin{cases}\frac{1}{j\pi f} & si\ f\neq 0\\ 0 & si\ f=0\end{cases}$
Echelon $u(t)$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{j\pi f}+\delta(f))$
Impulsion exponentielle $e^{-at}u(t)\ (a>0)$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$t.e^{-at}u(t),\ (a>0)$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^2}$
Double exponentielle $e^{-a\lvert t\rvert}\ (a>0)$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Dirac retardé $\delta(t-t_0)$	$e^{j2\pi f t_0}$
Peigne de Dirac $\sum_{n\to-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k\to-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{k}{T})$
Rectangle de largeur T $rect_T(t)=rect(\frac{t}{T})$	$T\ sinc(fT)$
Triangle de largeur 2T $tri_T(t)=tri(\frac{t}{2T})$	$T\ sinc^2(fT)$