Chapitre 1 :

Notions de base

1.1 Introduction

La géométrie a vu le jour entre 1790 et 1890. Son fondateur Gaspard Monge a défini de nombreux concepts géométriques fondamentaux, qui allaient bien au-delà des Éléments d'Euclide (qui avaient jusqu'alors dominé la pensée géométrique). Au cours de cette période, l'algèbre et la géométrie ont connu une sorte de coévolution, s'inspirant et se renforçant mutuellement. La géométrie projective s'est avérée être l'une des structures les plus fondamentales qui avait en même temps la représentation algébrique la plus élégante. Les concepts d'algèbre linéaire et multilinéaire ont été développés en étroite relation avec leur signification géométrique.

Depuis les années 1970, la géométrie a changé structurel grâce aux ordinateurs, et en particulier l'infographie. Cette évolution a eu un double effet. D'une part, elle a permet une bonne visualisation (CAO, les films d'animation, les jeux, modèle automobile, des molécules chimiques). D'autre part, l'ordinateur est devenu un outil qui a permis aux mathématiciens de visualiser des concepts abstraits et de faire des recherches précises à un niveau encore très visuel.

Tous ces développements ont permis de porter à nouveau à l'attention du monde mathématique un traitement plus concret et plus algorithmique de la géométrie. En fait, il s'est avéré que de nombreux concepts liés à la géométrie du XIXe siècle étaient tout à fait appropriés pour traiter les structures géométriques de manière computationnelle.

Ce chapitre revient sur les notions de base sur l’espace vectoriel. Il donne la représentation d’un vecteur et illustre les opérations sur les vecteurs.

1.2 Points et vecteurs

Il important de ne pas confondre un point et un vecteur :

- Un point est lié à un repère par ses coordonnées, il est donc fixe sur ce repère.
- Un vecteur est 'libre' dans un repère, il peut se déplacer dans tout le repère à condition de conserver sa norme, son sens et sa direction. Il est également caractérisé par ses coordonnées.

Un vecteur est une "force" agissant sur un point dans une direction donnée, un sens donnée et avec une certaine intensité.

Exemple :

1. A(1;2), est le point du repère qui a pour abscisse 1 et pour ordonnée 2
2. $\vec{u}$ (1;2) représente en tout point le déplacement d'1 unité en abscisse puis de 2 unités en ordonnée.

1.3 Des points au vecteur

Soient A et B deux points de coordonnées respectives A(a1;a2) et B(b1;b2). Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (x;y) a pour abscisse: x=b1-a1 ; et pour ordonnée y=b2-a2

Exemple :

A(1;2) et B(3;4) alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$a pour abscisse (3-1)=2 et pour ordonnée (4-2)=2 d'où $\overrightarrow{AB}$ (2;2)

1.4 Opérations sur les vecteurs

a. Addition

L'addition de vecteurs s'appelle somme ou résultante et génère un vecteur.

Soient $\vec{u}$ (u1;u2) et $\vec{v}$ (v1;v2) deux vecteurs. Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées : (u1+v1;u2+v2):

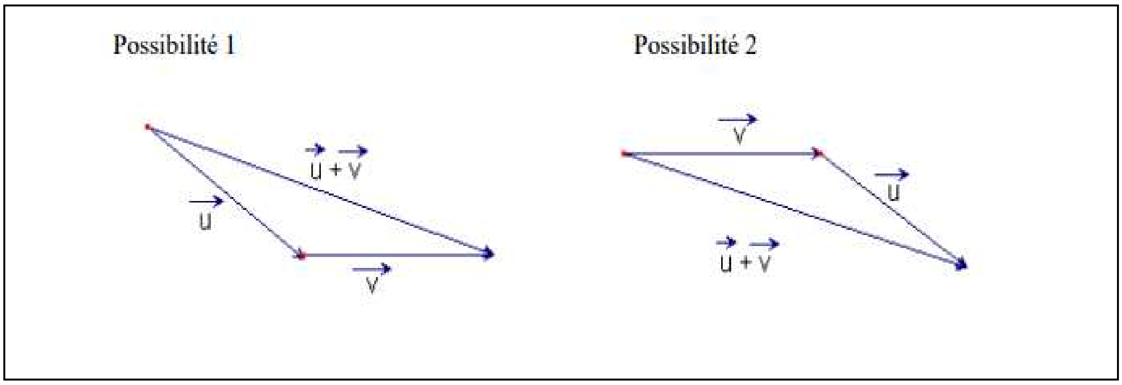
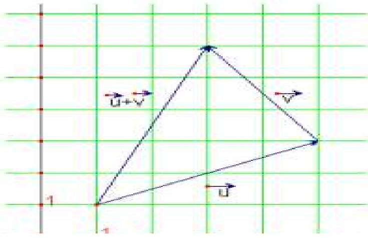


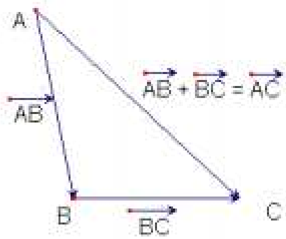
Fig.1 Schémas d'addition de deux vecteurs

Exemple :

Dans un plan cartésien on a $\vec{u}$ (4;2) et $\vec{v}$ (-2,3),
$\vec{w}$ =$\vec{u}$ +$\vec{v}$ alors $\vec{w}$ (4+(-2);2+3) donc $\vec{w}$ (2;5).



Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}$ +$\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AC}$

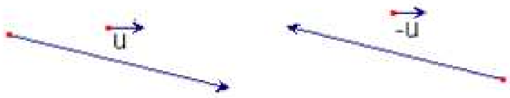


Règle du polygone fermé

$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$

b. Soustraction

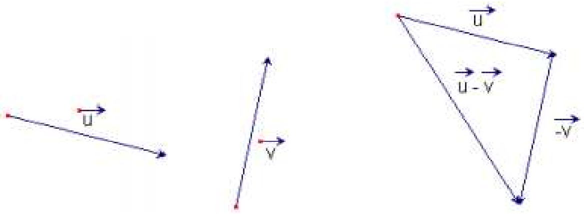
Si on change le signe d'un vecteur, son sens sera à l'opposé.



La soustraction de deux vecteurs est l'addition d'un vecteur avec le vecteur opposé.

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Le vecteur $\vec{w}$ =$\vec{u}$ -$\vec{v}$ a pour coordonnées: (u1-v1;u2-v2)



Exemple :

$\vec{u}$ (4;2) et $\vec{v}$ (-2,3), alors $\vec{w}$ =$\vec{u}$ -$\vec{v}$ = (4-(-2);2-3) donc $\vec{w}$ (6;-1).