

Chapitre 2: Algèbre de BOOLE

- **Définition des variables et fonctions logiques**
- **Les opérateurs de base et les portes logiques .**
- **Les lois fondamentales de l'algèbre de Boole**



1. Introduction

- Les machines numériques sont constituées d'un ensemble de circuits électroniques.
- Chaque circuit fournit une fonction logique bien déterminé (addition, comparaison ,....)
- Pour concevoir et réaliser ce circuit on doit avoir modèle mathématique de la fonction réalisé par ce circuit .
- Ce modèle doit prendre en considération le système binaire.
- Le modèle mathématique utilisé est celui deBoole.

2. Algèbre de Boole

- George Boole est un mathématicien anglais (1815-1864).
- Il a fait des travaux dont les quels les expressions (fonctions) sont constitués par des objets (variables) qui peuvent prendre les valeurs 'OUI' ou 'NON'.
- Ces travaux ont été utilisés pour faire l'étude des systèmes qui possèdent deux états s'exclut mutuellement :
 - Le système peut être uniquement dans deux états E1 et E2 tel que E1 est l'opposé de E2.
 - Le système ne peut pas être dans l'état E1 et E2 en même temps
- Ces travaux sont bien adaptés au Systèmes binaire (0 et 1).

Exemple de systèmes à deux états

- Un interrupteur est ouvert ou non
- Une lampe est allumée ou non
- Une porte est ouverte ou non
- Remarque :

On peut utiliser les conventions suivantes :

OUI → VRAI (true)

NON → FAUX (false)

OUI → 1 (Niveau Haut)

NON → 0 (Niveau Bas)

3. Définitions et conventions

3.1. Niveau logique : Lorsque on fait l'étude d'un système logique il faut bien préciser le niveau du travail.

Niveau	Logique positive	Logique négative
H (Hight) haut	1	0
L (Low) bas	0	1

Exemple :

Logique positive :

lampe allumé : 1

lampe éteinte : 0

Logique négative

lampe allume : 0

lampe éteinte : 1

3.2. Variable logique

- Une variable logique (booléenne) est une variable qui peut prendre soit la valeur 0 ou 1 . Généralement elle est exprimée par un seul caractère alphabétique en majuscule (A , B, S , ...)
- Exemple :
 - Une lampe : allumée $L = 1$
 éteinte $L = 0$
 - Premier interrupteur ouvert : $I1 = 1$
 fermé : $I1 = 0$
 - 2ème interrupteur ouvert : $I2 = 1$
 fermé : $I2 = 0$

3.3. Fonction logique

- C'est une fonction qui relie N variables logiques avec un ensemble d'opérateurs logiques de base.
- Dans l'Algèbre de Boole il existe trois opérateurs de base : NON , ET , OU.
- La valeur d'une fonction logique est égale à 1 ou 0 selon les valeurs des variables logiques.
- Si une fonction logique possède N variables logiques $\rightarrow 2^n$ combinaison $\rightarrow$ la fonction possède 2^n valeurs.
- Les 2^n combinaisons sont représentées dans une table qui s'appelle table de vérité (TV).

Exemple d'une fonction logique

$$F(A,B,C) = \overline{A} \overline{B} C + \overline{A} B \overline{C} + A \overline{B} \overline{C} + A B C$$

Une table de vérité

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

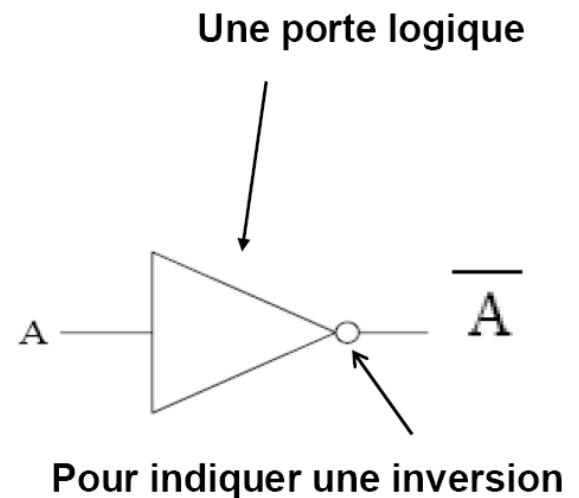
4. Opérateurs logiques de base

4.1 NON (négation)

- NON : est un opérateur unaire (une seule variable) à pour rôle d'inverser la valeur de la variable .

- $F(A) = \text{Non } A : \overline{A}$
(lire A barre)

A	$\overline{A}$
0	1
1	0



4. Opérateurs logiques de base

4.2 ET (AND)

- Le ET est un opérateur binaire (deux variables) , à pour rôle de réaliser le Produit logique entre deux variables booléennes.
- Le ET fait la conjonction entre deux variables.
- Le ET est défini par : $F(A,B) = A \cdot B$

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

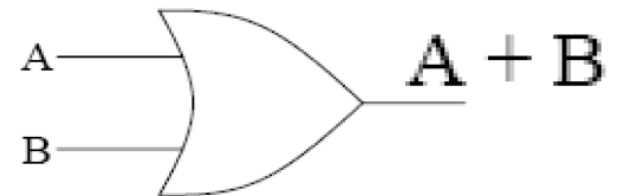


4. Opérateurs logiques de base

4.3 OU (OR)

- Le OU est un opérateur binaire (deux variables) , à pour rôle de réaliser la somme logique entre deux variables logiques.
- Le OU fait la disjonction entre deux variables.
- Le OU est défini par $F(A,B) = A + B$ (il ne faut pas confondre avec la somme arithmétique)

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Remarques

- Dans la définition des opérateurs ET , OU , nous avons juste donner la définition de base avec deux variable.
- L'opérateur ET pour réaliser le produit entre plusieurs variables booléens (ex : $A \cdot B \cdot C \cdot D$).
- L'opérateur OU peut aussi réaliser la somme entre plusieurs variables logique (ex : $A + B + C + D$).
- Dans une expression on peut aussi utiliser les parenthèses.

4.4 Précédence des opérateurs (priorité des opérateurs)

- Pour évaluer une expression logique (fonction logique) :
 - on commence par évaluer les sous expressions entre les parenthèses.
 - puis le complément (NON) ,
 - en suite le produit logique (ET)
 - enfin la somme logique (OU)

Exemple :

$$F(A, B, C) = (\overline{AB}) (C + B) + A \overline{B}C$$

4.5 Lois fondamentales de l'Algèbre de Boole

• L'opérateur NON

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{A} + A = 1$$

$$\overline{A} \bullet A = 0$$

4.5 Lois fondamentales de l'Algèbre de Boole

•L'opérateur ET

$(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C) = A \bullet B \bullet C$	Associativité
$A \bullet B = B \bullet A$	Commutativité
$A \bullet A = A$	Idempotence
$A \bullet 1 = A$	Élément neutre
$A \bullet 0 = 0$	Élément absorbant

• L'opérateur OU

$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ Associativité

$A + B = B + A$

Commutativité

$A + A = A$

Idempotence

$A + 0 = A$

Elément neutre

$A + 1 = 1$

Elément absorbant

4.5 Lois fondamentales de l'Algèbre de Boole

• Distributivité

$A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$ Distributivité du ET sur le OU

$A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$ Distributivité du OU sur le ET

4.5 Lois fondamentales de l'Algèbre de Boole

•Autres relations utiles

$$A + (A \cdot B) = A$$

$$A \cdot (A + B) = A$$

$$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$$

$$A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$$

5. Dualité de l'algèbre de Boole

- Toute expression logique reste vraie si on remplace le ET par le OU , le OU par le ET , le 1 par 0 , le 0 par 1.
- Exemple :

$$A + \underline{1} = 1 \quad \rightarrow \quad A \cdot \underline{0} = 0$$

$$A + \underline{A} = 1 \quad \rightarrow \quad A \cdot \underline{A} = 0$$

6. Théorème de DE-MORGANE

- La somme logique complimentée de deux variables est égale au produit des compléments des deux variables.

$$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$

- Le produit logique complimenté de deux variables est égale au somme logique des compléments des deux variables.

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

FIN

CHAPITRE 2

Algèbre de BOOLE