I. Introduction à la Convolution

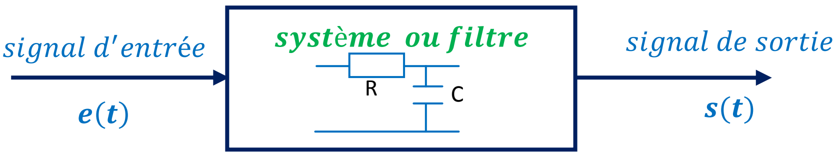
La représentation des signaux dans le domaine tmporel et fréquentiel est très importante. Cependant, pouvoir analyser et étudier spécifiquement les circuits et systèmes opérant sur les signaux dans le but de réaliser et répondre à certains objectifs est aussi très important.

Le but de cette partie est devélopper certaines techniques de repésentation et d »nalyse des systèmes linéaires, nécessaire pour l'étude des systèmes de commande ou de transmission d'information.

On définit un système par un opérateur mathématique qui transforme tout signal d'éntrée $e(t)$ en un signal de sortie $s(t)$.

$$signal\ d'entrée\quad \boldsymbol{e(t)} \xrightarrow{\boldsymbol{Système}} \boldsymbol{s(t)}\ ,signal\ de\ sortie$$

Le signal $s(t)$, appelé réponse du système de transmission est une fonction du signal d'entrée $e(t)$ et des caractéristiques du système de transmission ou de traitement.



Un système est toujours décrit par la relation entrée/sortie evoluant dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Une des méthodes d'analyse dans le domaine temporel permettant de relier tout signal de sortie (réponse du sytème) à un signal d'entrée (signal d'excitation du système) est basée sur la notion de ***Convolution des signaux***.

Avant d'introduire la notion de convolution il est préferable tout d'abord de définir quelques propriétés des sytèmes.

1.1 Définitions

- Systèmes linéaires

En considérant le signal $s_1(t)$ comme étant la réponse du système $s(t) = S[\,e(t)\,]$ à l'entrée $e_1(t)$ et le signal $s_2(t)$ en tant que sa réponse au signal d'entrée $e_2(t)$, alors on dit que le système $S[\,.\,]$ est linéaire si on a la propriété suivante :

$$a\ \boldsymbol{e_1(t)} + b\ \boldsymbol{e_2(t)} \xrightarrow{\boldsymbol{systèmes\ linéaires}} a\ \boldsymbol{s_1(t)} + b\ \boldsymbol{s_2(t)}$$

Nota : il est important de remarquer que presque tous les systèmes sont linéaires pour des faibles signaux (première approximation). En général, tous les sytèmes réels (physiques) sont globalement des systèmes non linéaires. La linéarité n'est valable qu'au voisinage d'un point de fonctionnement du système. C'est l'opération de linéarisation des systèmes pour de faibles signaux autour du point de fonctionement choisi.

- **Systèmes Invariants (stationnaires)**

Un système est dit invariant dans le temps (ou stationnaire) si son comportement est indépendant de l'origine du temps, c'est-à-dire :

$$si\ \ \boldsymbol{e(t)} \xrightarrow{Système\ Invariant} \boldsymbol{s(t)}\ \ alors\ \ \boldsymbol{e(t-\theta)} \xrightarrow{Système\ Invariant} \boldsymbol{s(t-\theta)}$$

En théorie et traitement du signal, en général on considère les filtres comme des sytèmes de de transmission ou traitement linéaires, continus et invariants.

1.2 Convolution des Signaux

La convolution de deux fonctions (signaux) est un concept physique très important dans plusieurs domaine de la recherche scientifique. L'intégrale ou produit de convolution, notée *, est définie par :

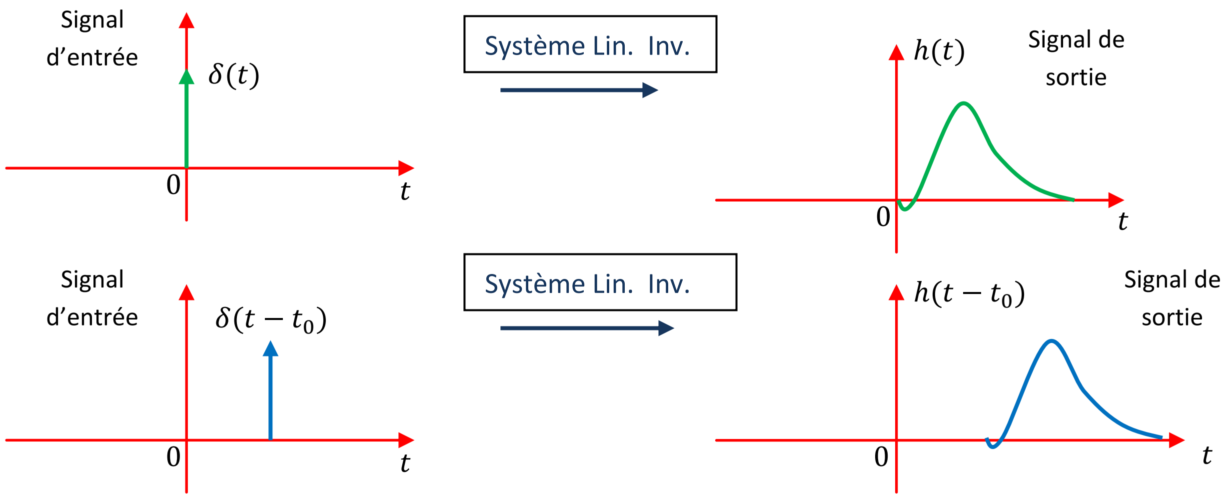
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

On appele $h(t)$ la réponse impulsionnelle du système (ou filtre) excité par une impulsion de Dirac $\boldsymbol{\delta(t)}$. la propriété d'invariance temporel (stationnarité) du système permet de déterminer la réponse à $\boldsymbol{\delta(t-t_0)}$, obtenu par translation$t_0$, ((t) retardé de t_0), comme étant un signal $\boldsymbol{h(t-t_0)}$ ayant subi la même translation $\left(\ h(t) retardé\ de\ t_0\ aussi\ \right)$:

$$signal\ e(t) appliqué\ à\ l'entrée\ du\ système\ SLI:\quad e(t) \xrightarrow{réponse\ du\ SLI} s(t)$$

$$impulsion\ \delta(t)\ appliquée\ à\ l'entrée\ du\ système\ SLI:\quad \delta(t) \xrightarrow{réponse\ du\ SLI} h(t)$$

$$impulsion\ retardée\ \ \delta(t-t_0)\ à\ l'entrée\ du\ \ SLI:\quad \delta(t-t_0) \xrightarrow{réponse\ du\ SLI} h(t-t_0)$$



En ecrivant tout signal d'entrée $x(t)$ sous forme d'une fonction intégrale de l'impulsion de Dirac, Sachant que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).\delta(t-\tau)d\tau$$

et dû au fait de la linéarité et de l'invariance du système, on obtient l'expression suivante pour toute sortie $y(t)\ d'un\ système\ excité\ par\ une\ entrée\ x(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} h(t)\ \ réponse \\ impulsionnelle \end{array}} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau)d\tau$$

$$h((t-\tau)\ est\ la\ réponse\ du\ système\ à\ l'impulsion\ \delta(t-\tau)$$

La convolution exprime la réponse d'un système linéaire invariant (SLI) à un signal d'entrée quelconque à partir de la réponse du système au signal type de l'impulsion de Dirac, réponse impulsionnelle.

L a réponse dépend donc uniquement du filtre, caractérisé par sa réponse impulsionnelle h(t), et de l'histoire du signal d'entrée.

1.3 Propriétés de la Convolution

Le passage d'un signal à travers d'un système linéaire invariant est équivalent à une opération de convolution entre ce signal et la réponse impulsionnelle du système. Cette convolution possède les propriétés principales suivantes :

- ***Commutativité :***

$$\boldsymbol{x(t) * h(t) = h(t) * x(t)}$$

- ***Associativité :***

$$\boldsymbol{[x_1(t) * h(t)] * x_2(t) = x_1(t) * [h(t) * x_2(t)]}$$

- ***Distributivité :***

  L'opération de convolution est distributive par rapport à l'addition de deux signaux.

$$\boldsymbol{x(t) * [\,h(t) + k(t)] = x(t) * h(t) + x(t) * k(t)}$$

- ***Elément neutre de la convolution***

  L'élément neutre de l'opération de convolution est le signal impulsion ou pic de Dirac

$$\boldsymbol{x(t) * \delta(t) = x(t) * \delta(t) = x(t)}$$

- **Si l'un des signaux est causal $(= \mathbf{0}\ \boldsymbol{pour}\ \boldsymbol{t} < 0)$ alors l'expression de la convolution est :**

$$\boldsymbol{y(t)} = \int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \boldsymbol{x(\tau).h(t-\tau)d\tau}$$

- **La convolution de signaux causaux est aussi causale**

$$si\ x(t) = 0\ et\ h(t) = 0\ \ pour\ t < 0\ \ alors\ la\ convolution\ s'écrira:$$

$$\boldsymbol{y(t)} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{x(\tau).h(t-\tau)d\tau} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{x(t-\tau).h(\tau)d\tau}$$

- **Changement d'échelle**

$$\boldsymbol{si\ \ x(t) * h(t) = y(t)\ \ alors\ \ x(at) * h(at) = \frac{1}{|a|} y(at)}$$

- **Differentiation de la sortie**

$$\boldsymbol{si\ \ y(t) = x(t) * h(t)}$$

$$\boldsymbol{alors\ \ \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} * h(t)}$$

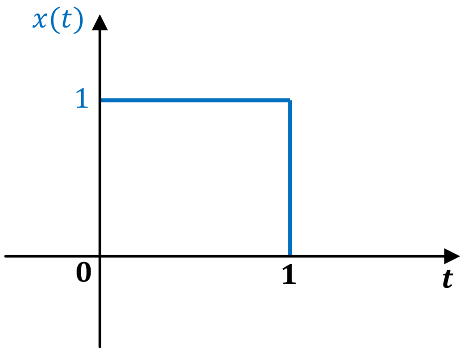
$$\boldsymbol{ou\ bien}$$

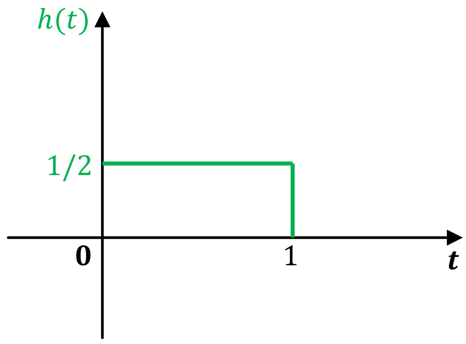
$$\boldsymbol{\frac{dy(t)}{dt} = x(t) * \frac{dh(t)}{dt}}$$

1.4 Evaluation graphique de l'intégrale de convolution

Exemple de convolution de 2 signaux portes

Soient $x(t)$ et $h(t)$ deux fonctions du temps (signaux) représentées chacune par son graphe suivant :





Pour évaluer l'intégrale de convolution de ces deux signaux on effectue les étapes suivantes en utilisant une technique graphique (convolution de 2 signaux portes)) :

1. Prendre le symétrique de $h(\tau)$ par rapport à l'axe des ordonnées $\rightarrow h(-\tau)$: retournement
2. Faire glisser ou déplacer $h(-\tau)$ par une quantité t ce qui donne $h(t-\tau)$: décalage
3. Multiplier $h(t-\tau)\ x(\tau)$
4. Intégrer sur le support de $h(t-\tau)x(\tau)$: calculer la surface limitée par ce produit pour différentes valeurs de t

$$t \in support\big(x(t)\big) \cup support\big(h(t)\big)\ \ ou$$

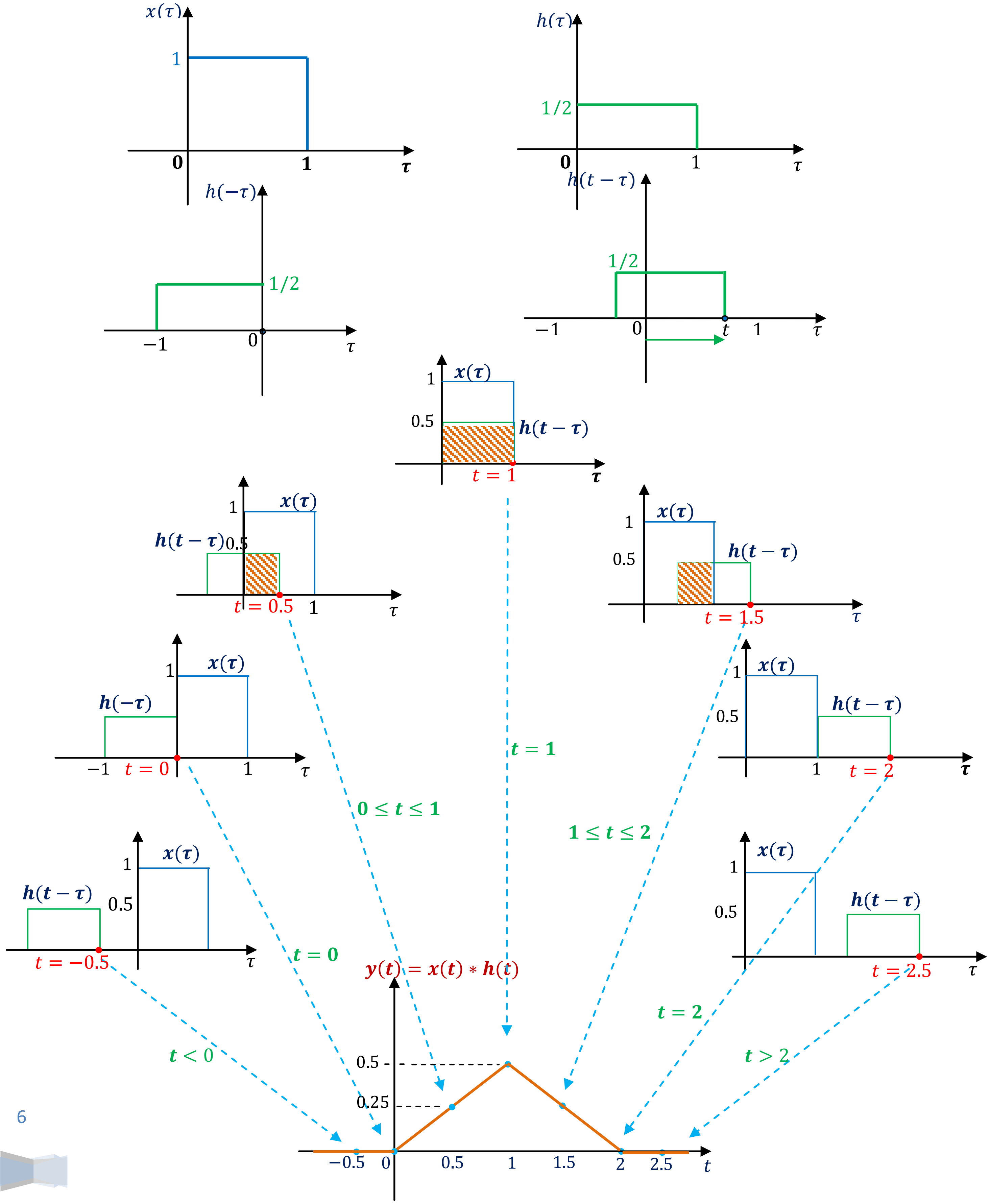
$$\sum \boldsymbol{des\ bornes\ inf.de\ x(t) et\ h(t)} \leq \boldsymbol{t} \leq \sum \boldsymbol{des\ bornes\ sup.\ de\ x(t) et\ h(t)}$$

Dans le cas de la convolution de ces deux signaux on a : $0+0 \leq t \leq 1+1$

$$donc\ \ 0 \leq t \leq 2 \quad \rightarrow \quad support\ de\ (\ y(t) = x(t) * h(t)\ )$$

Voir animation sur : https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_de_convolution

Schémas graphiques de la convolution



1.5 Théorème de Plancherel

Le théorème de Plancherel exprime une relation très importante entre la transformée de Fourier et le produit de convolution qui s'énonce sous la forme suivante :

Théorème de Plancherel : la transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple et réciproquement.

$$\boldsymbol{Convolution}:\ \boldsymbol{x(t)*h(t)} \xrightarrow{\mathcal{TF}} \boldsymbol{X(f)\times H(f)}\ \boldsymbol{Multiplication}$$

$$et\ par\ réciproque$$

$$\boldsymbol{Multiplication}:\ \boldsymbol{x(t)\times h(t)} \xrightarrow{\mathcal{TF}} \boldsymbol{X(f)*H(f)}\ \boldsymbol{Convolution}$$

Ce théorème dit qu'une convolution temporelle est équivalente à une multiplication dans le domaine fréquentiel, et vice versa.

Démonstration :

Soient 2 signaux $x(t)$ et $h(t)$ $et\ leurs\ transf.de\ Fourier\ respectives$ $X(f)et\ H(f)$ tels que :

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{TF}} X(f) \quad et\ \ h(t) \xrightarrow{\mathcal{TF}} H(f)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt \quad et \quad H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j2\pi ft} dt$$

$$et\ soit\ \ y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau)d\tau$$

$$la\ transformée\ de\ Fourier\ Y(f)\ du\ signal\ de\ convolution\ y(t) est\ donc:$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j2\pi ft} dt \ = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) * h(t)]\, e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau)d\tau\right] e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau)e^{-j2\pi ft} d\tau\right] dt$$

$$en\ écrivant\ \ e^{-j2\pi ft} = e^{-j2\pi f\tau}.e^{-j2\pi f(t-\tau)}\ \ il\ vient\ que$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\right]\left[h(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)}\right] d\tau\, dt$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\right]\left[h(t-\tau)e^{-j2\pi f(t-\tau)}\right] d\tau\right] dt$$

en posant $\theta = t - \tau$ *donc* $d\theta = dt$ *, on obtient par ce changement de variables :*

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)e^{-j2\pi f(\theta)}\, d\theta\right] d\tau =$$

$$Y(f) = \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau\right]}_{X(f)} \times \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)e^{-j2\pi f(\theta)}\, d\theta\right]}_{H(f)} =$$

$$d'\text{où } finalement : \quad Y(f) = X(f) \times H(f)$$

$$Y(f) = \mathcal{TF}\{x(t) * h(t)\} = X(f).H(f)$$

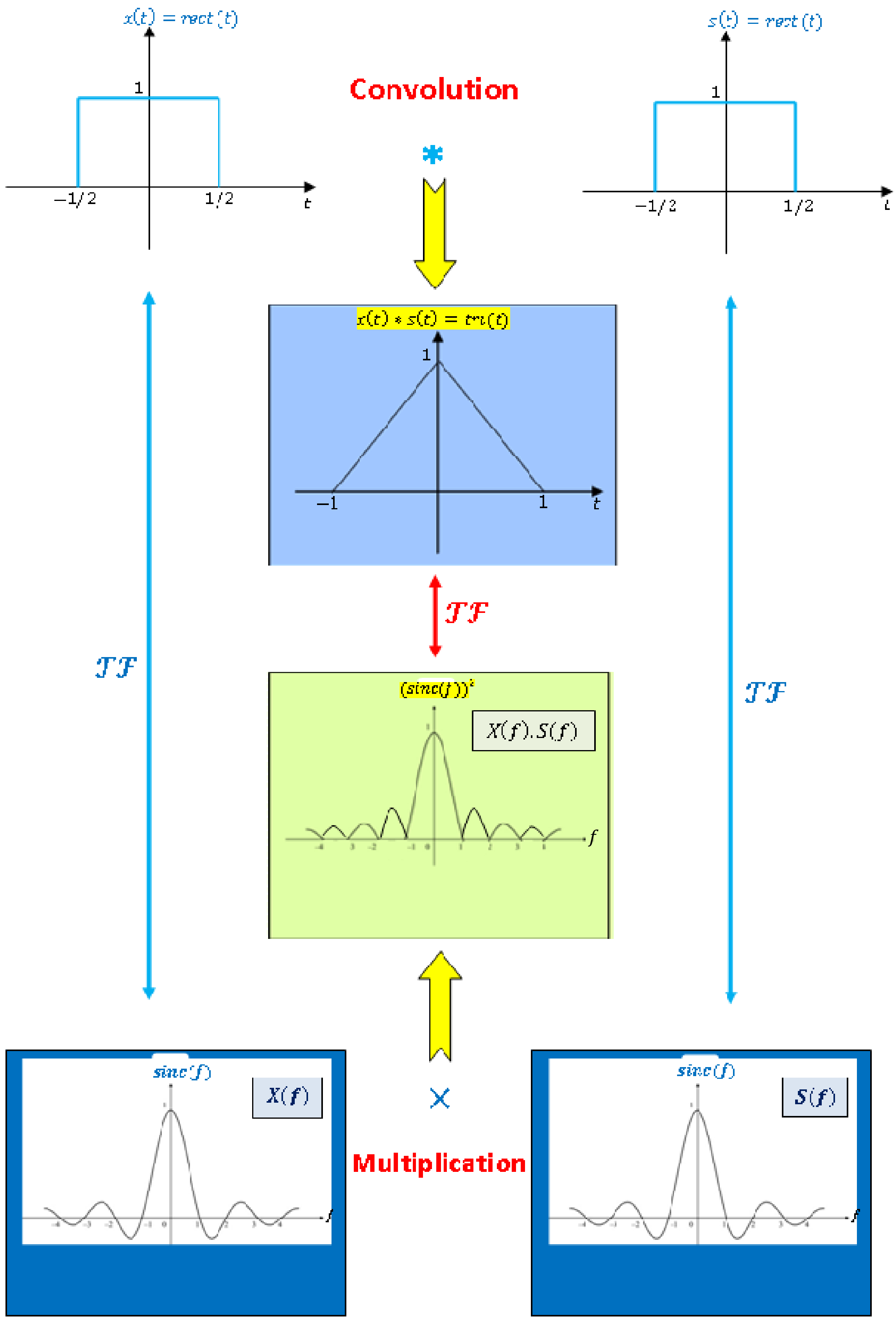
Ce théorème est particulièrement important dans l'étude des filtres analogiques et le traitement du signal en général.

1.6 Convolution des signaux périodiques

Lorsque les deux signaux réels $x(t) et\ s(t)$ à convoluer sont périodiques et possèdent la même période T_0 on définit alors la convolution de tels signaux de la manière suivante :

$$\boldsymbol{y(t) = x(t) * s(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau).s(t-\tau)d\tau}$$

Exemple d'application du théorème de Plancherel



II. Introduction à la Notion de Corrélation

Toute transmission d'information à travers n'importe canal (en l'occurrence un système) est liée à une transmission d'énergie. Lorsqu'on fait une mesure sur un phénomène, le processus subit toujours un prélevement d'énergie de la part du dispositif de mesure. Cette notion dénergie ou puisance d'un signal est très importante. On peut caractériser un signal selon des critères de distribution de leur énergie ou puissance dans le domaine temporel ou domaine fréquentiel. Cette caractérisation des signaux basée sur l'énergie et sur la puissance des signaux et de leurs interactions nous conduit à la notion de fonction d'Auto-corrélation et fonction d'Inter-corrélation.

Quelques applications directes de la corrélation

- Extraction ou détection d'un signal utile noyé dans un bruit par auto-corrélation. C'est une méthode complémentaire au filtrage fréquentiel.
- Mesure de distances et/ou de temps par inter-corrélation. Cette méthode est très exploitée dans le domaine des radars, sonars et autres GPS…
- L'autocorrélation peut donner une information sur des événements répétés tels que les battements musicaux ou les fréquences de pulsar en astronomie, même si cela ne peut pas donner la position dans le temps du battement.

2.1 Définitions

a.) Puissance instantanée d'un signal

La puissance à un instant t d'un signal $x(t)$ est défini par :

$$\boldsymbol{p(t) = x(t).x^*(t) = |x(t)|^2} \quad , \qquad x^*(t) : conjugué\ de\ x(t).$$

Puissance moyenne , notée $p(t,T)$, sur une durée T d'un signal x(t) est donnée par :

$$\boldsymbol{p(t,T) = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} x(\tau)\, x^*(\tau) d\tau = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} |x(\tau)|^2\, d\tau}$$

Energie d'un signal $x(t)$ sur une durée T est :

$$\boldsymbol{E_x^T = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, x^*(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2\, dt}$$

On définit les signaux à énergie totale finie E_x par :

$$\boldsymbol{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt} < \infty\, , \ \boldsymbol{E_x\ est\ une\ valeur\ finie}$$

On définit aussi les signaux à puissance totale finie P_x par :

$$\boldsymbol{P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, x^*(t) dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2\, dt} < \infty\, , \ P_x\ est\ une\ valeur\ finie$$

On peut aussi définir la puissance instantanée d'interaction de deux signaux $\boldsymbol{x(t)}$ *et* $\boldsymbol{y(t)}$ sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{p_{xy}(t) = x(t).y^*(t) \quad et \quad p_{yx}(t) = y(t).x^*(t)}$$

On remarque que si les deux signaux $x(t)$ *et* $y(t)$ sont réels alors $p_{xy}(t) = p_{yx}(t)$.
L'énérgie d'interaction entre deux signaux x(t) et y(t) sur une durée T est :

$$\boldsymbol{E_{xy}^T = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, y^*(t) dt}$$

La puissance moyenne d'interaction entre deux signaux x(t) et y(t) sur une durée T est :

$$\boldsymbol{P_{xy}^T = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, y^*(t) dt \quad et \quad P_{yx}^T = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)\, x^*(t) dt}$$

$$si\ x(t) et\ y(t) sont\ réels\ alors\ P_{xy}^T = P_{yx}^T$$

L'énérgie totale finie d'interaction entre deux signaux x(t) et y(t) sur une durée T est :

$$\boldsymbol{E_{xy}^\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t) dt \quad et \quad E_{xy}^\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, x^*(t) dt}$$

La puissance moyenne d'interaction entre deux signaux x(t) et y(t) sur une durée T est :

$$\boldsymbol{P_{xy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, y^*(t) dt \quad et \quad P_{yx} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} y(t)\, x^*(t) dt}$$

b.) Puissance fréquentielle d'un signal, Densité Spectrale

Soient deux signaux x(t) et y(t) possedant chacun une transformée de Fourier :

$$\boldsymbol{x(t) \xrightarrow{\mathcal{TF}} X(f) \quad et \quad y(t) \xrightarrow{\mathcal{TF}} Y(f)}$$

On définit le spectre de puissance ou densité spectrale du signal x(t) par :

$$\boldsymbol{S_{xx}(f) = X(f).X^*(f) = |X(f)|^2}$$

L'énergie contenue dans une bande de fréquences de largeur Δf autour d'une fréquence F_0 est donnée par l'expression suivante :

$$\boldsymbol{E_x(\Delta f, F_0) = \int_{F_0-\frac{\Delta f}{2}}^{F_0+\frac{\Delta f}{2}} S_{xx}(f)\, df}$$

L'énergie totale contenue dans le spectre $X(f)$ sous la forme suivante :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).X^*(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df$$

On peut aussi considerer la densité spectrale d'interaction de deux signaux x(t) et y(t) par les formules suivantes :

$$S_{xy}(f) = X(f).Y^*(f) \quad et \quad S_{yx}(f) = Y(f).X^*(f)$$

L'énergie totale d'interaction entre les deux signaux est donc obtenue par :

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).Y^*(f)\, df$$

$$et \quad E_{yx} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yx}(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f).X^*(f)\, df$$

2.2 Corrélation et Densité Spectrale

a.) Fonctions de corrélation pour les signaux à énergie finie

La fonction d'auto-corrélation d'un signal x(t) est définie par :

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x^*(t+\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau)\, x(\tau - t) d\tau$$

La fonction d'inter-corrélation entre les deux signaux x(t) et y(t) est donnée par :

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y^*(t+\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t)\, y^*(\tau) d\tau$$

Les fonctions de corrélation traduisent le degré de similitude d'un signal avec lui-même ou entre deux signaux au niveau de leur forme et leur position relative dans le temps en fonction d'un certain paramètre de translation. La corrélation implémente un processus de comparaison entre les signaux.

Dans le cas dela fonction d'auto-corrélation, ceci correspond à l'étude de ressemblance d'un processus avec lui-même au cours d'un certain temps.

Propriétés de la fonction d'autocorrélation

La fonction d'auto-corrélation $R_{xx}(t)$ possède deux propriétés très importantes, à savoir :

- La fonction d'auto-corrélation des signaux réels est paire :

$$R_{xx}(t) = R_{xx}(-t)$$

En effet, si le signal x(t) est réel alors on a :

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x^*(t+\tau)d\tau \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau)\, x(\tau - t)d\tau$$

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x(t+\tau)d\tau \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x(\tau - t)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x\big(\tau + (-t)\big)d\tau = R_{xx}(-t)$$

$$\boldsymbol{R_{xx}(t) = R_{xx}(-t) \;\; donc \;\; R_{xx}(t) \; est \; paire}$$

- La fonction d'auto-corrélation $R_{xx}(t)$ a sa valeur maximale à l'origine, c-à-d, pour $t = 0$. Cette valeur de $R_{xx}(0)$ est égale à l'énerige totale du signal $x(t)$:

$$\boldsymbol{|R_{xx}(t)| \le R_{xx}(0) \quad \forall t \in \mathcal{R}}$$

$$et \;\; R_{xx}(0) = E_x$$

$$en\, effet \;\; R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x^*(t+\tau)d\tau\Big|_{t=0} \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x^*(\tau)d\tau = E_x$$

Cette relation se comprend intuitivement par le fait que la fonction d'auto-corrélation étant une anlyse de la ressemblance d'un signal avec lui-même, et le résultat de cette comparaison est maximum lorsque ne subit aucun décalage temporel $(t = 0)$, c-à-d lorsqu'il est identique à lui-même.

b.) Relation avec la densité spectrale d'énergie

Considérons l a transformée de Fourier inverse de la densité spectrale d'un signal x(t) quelconque :

$$\mathcal{F}^{-1}\{S_{xx}(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f).X^*(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} * \mathcal{F}^{-1}\{X^*(f)\}$$

$$= x(t) * x^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,.\,x^*(\tau - t)d\tau = R_{xx}(t)$$

D'où la relation importante suivante :

$$\boldsymbol{R_{xx}(t) \xrightarrow{\mathcal{TF}} S_{xx}(f)}$$

$$\boldsymbol{R_{xy}(t) \xrightarrow{\mathcal{TF}} S_{xy}(f)}$$

$$\boldsymbol{R_{yx}(t) \xrightarrow{\mathcal{TF}} S_{yx}(f)}$$

Ainsi la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation d'un signal représente la dnsité spectrale de l'énergie du signal, en d'autres termes ça correspond à la distribution de l'énergie du signal sur l'axe des fréquences. C'est la distribution énergétique contenue dans le spectre du signal.

Souvent il est facile de calculer indirectement la fonction d'autocorrélation d'un signal ou d'intercorrélation en passant par sa densité spectrale.

Théorème de Parseval

L'énergie totale d'un signal ne dépend pas du domaine de représentation choisi. Cette quantité est invariante quel que soit cette repésentation : elle est la même qu'il s'agisse d'une représentation temporelle ou fréquentielle, on a ainsi :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df \quad ; ceci\ est\ le\ théorème\ de\ Parseval$$

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).Y^*(f)\, df$$

$$et$$

$$E_{yx} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yx}(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t).x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f).X^*(f)\, df$$

c.) Corrélation des signaux périodiques

Pour un signal périodique réel x(t) de période T_0 , on définit la corrélation de la manière suivante :

$$R_{xx}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau)\, x(t+\tau) d\tau$$

Sahant que tous les signaux périodiques peuvent s'exprimer sous forme d'un développement ensérie de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi F_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi F_0 t) \quad , \quad avec\ F_0 = \frac{1}{T_0}$$

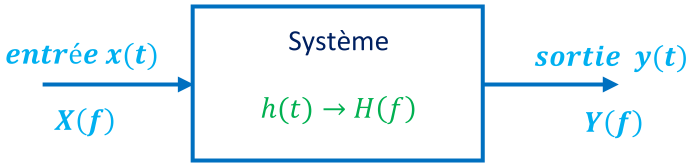
En appliquant la relation précédente de la corrélation on peut obtenir la fonction d'autocorréaltion des signaux périodiques suivante :

$$R_{xx}(t) = {a_0}^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) \cos(2\pi F_0 t)$$

On peut effectivement conclure que la fonction d'autocorrélation conserve l'information de périodicité du signal (fréquence) mais elle perd l'information de phase et d'amplitude. L'autocorrélation possède toutes les fréquences comprises dans le signal initial et uniquement ces fréquences.

2.3 Principales Relations entre la convolution et les densités spectrales

Pour un système linéaire invariant on a les propriétés suivantes qui montrent les relations entre les différentes grandeurs intervenant dans ce système, à savoir, les relation de convolution et des densités spectrales de ces grandeurs.



$$\boxed{\begin{gathered} \boldsymbol{y(t) = h(t) * x(t)} \\ \boldsymbol{S_{yx}(f) = H(f)\, S_{xx}(f)} \\ \boldsymbol{S_{yy}(f) = |H(f)|^2\ S_{xx}(f)} \end{gathered}}$$

- La densité inter-spectrale d'énergie $\boldsymbol{S_{yx}(f)}$ entre la sortie $y(t)$ du sytème et l'entrée $x(t)$ est égale au produit de la réponse fréquentielle du système $\boldsymbol{H(f)}$ et la densité spectrale d'énergie de l'entrée $\boldsymbol{S_{xx}(f)}$.
- La densité spectrale d'énergie $S_{xx}(f)$ de la sortie $y(t)$ est égale au produit du carré de la réponse fréquentielle $|\boldsymbol{H(f)}|^2$ par la densité spectrale $\boldsymbol{S_{xx}(f)}$ de l'entrée $x(t)$.