

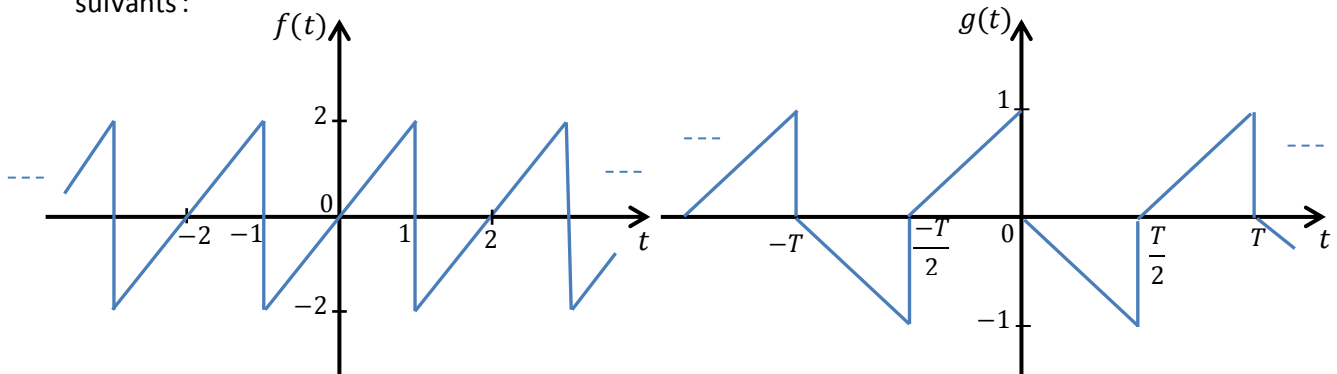
I- Séries de Fourier des Signaux Périodiques

Séries de Fourier des Signaux Périodiques		
Séries de Fourier de $x(t)$ avec période T_0	$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)$	
Calcul des coefficients	$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt$ $n = 0, 1, 2, \dots + \infty$	$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$ $n = 1, 2, \dots + \infty$
Séries de Fourier Complexes de $x(t)$ $f_0 = \frac{1}{T_0}$ fréquence de $x(t)$	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \rightarrow C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$	

Exercice 2.1 Développer sous forme de série de Fourier complexe (bilatérale) le signal suivant :

$$x(t) = 1 + \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t + \cos \left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4} \right)$$

Exercice 2.2 Calculer les coefficients de Fourier complexes pour les deux signaux périodiques suivants :



Exercice 2.3 Soit un signal $f(t)$ de période 2π tel que :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases}, \text{ sur une période.}$$

- a. Tracer le graphe de ce signal dans l'intervalle $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.
- b. Montrer que la série de Fourier de $f(t)$ dans l'intervalle $-\pi \leq t \leq \pi$ est égale à :

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left[\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right]$$

- c. Par un choix approprié de t , montrer que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

II- Intégrale de Fourier des Signaux Non-périodiques

Exercice 3.1 Sachant que le signal échelon unité $u(t)$ peut s'écrire sous la forme $u(t) = \frac{1}{2} (1 + \text{sgn}(t))$

où la fonction signe notée sgn , est définie par :

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & \text{pour } t > 0 \\ -1 & \text{pour } t < 0 \end{cases} = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|} \text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \begin{cases} e^{-at} & \text{pour } t > 0 \\ -e^{at} & \text{pour } t < 0 \end{cases}, \text{ avec } a > 0$$

Trouver la transformée de Fourier de $u(t)$.

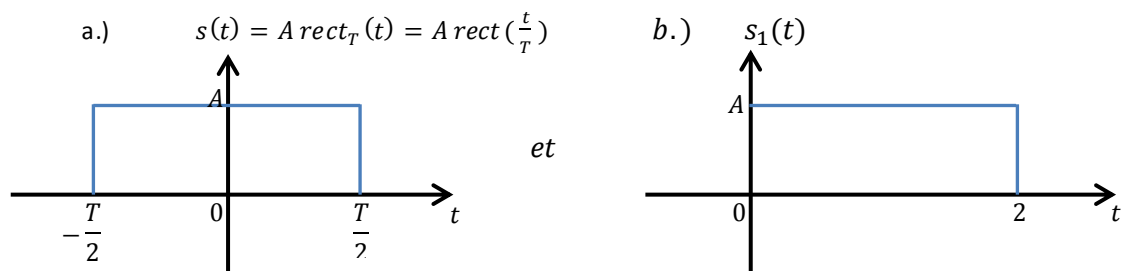
Exercice 3.2 Sachant que le signal échelon unité $u(t)$ peut s'écrire sous la forme $u(t) = \frac{1}{2} (1 + \text{sgn}(t))$

où la fonction signe notée sgn , est définie par :

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & \text{pour } t > 0 \\ -1 & \text{pour } t < 0 \end{cases} = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|} \text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \begin{cases} e^{-at} & \text{pour } t > 0 \\ -e^{at} & \text{pour } t < 0 \end{cases}, \text{ avec } a > 0$$

Trouver la transformée de Fourier de $u(t)$.

Exercice 3.3 Trouver la transformée de Fourier des signaux suivants :



$$s(t) = A \text{rect}_T(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}; \text{ fen\^etre rectangulaire ou signal porte} \\ \text{d'ouverture (ou largeur) } T \text{ et d'amplitude (ou hauteur) } A$$

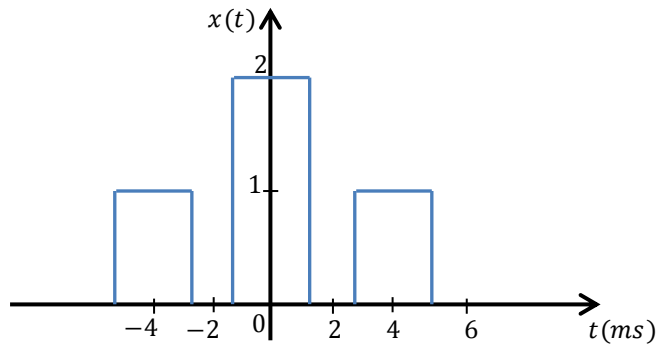
Exercice 3.4 Tracer le graphe et trouver la TF pour le signal suivant :

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -1 \leq t \leq 0 \\ 2 & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{pour } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

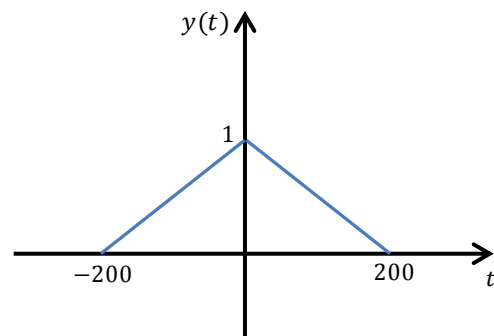
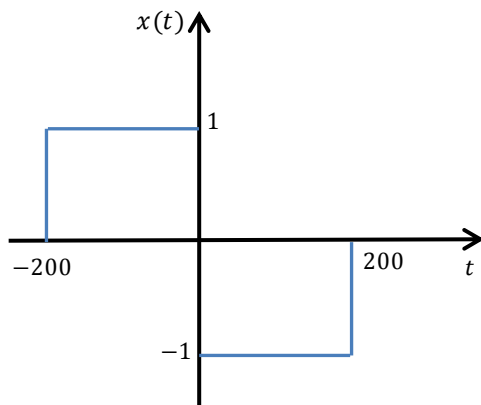
Exercice 3.5 Trouver la transformée de Fourier du signal complexe $x(t)$ donné par :

$$x(t) = \begin{cases} e^{j2\pi t} & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Exercice 3.6 A partir de la seule observation du signal temporel $x(t)$ de la figure suivante, précisez ce que vaut sa densité spectrale en $f=0$ Hz puis calculer et tracer sa transformée de Fourier.

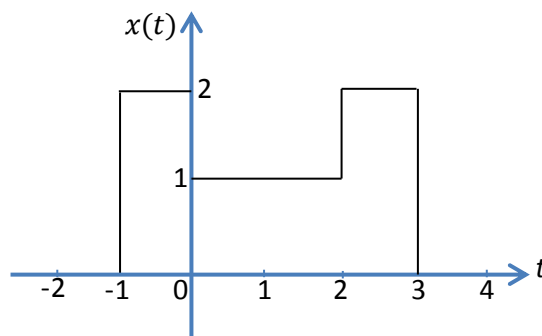


Exercice 3.7 Partant de la transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire et de la propriété d'intégration, calculer la TF de $x(t)$ et $y(t)$ ci-dessous :



Exercice 3.8 Le signal $x(t)$ est représenté par son graphe ci-dessous. On note $X(f)$ sa transformée de Fourier. Répondre aux questions suivantes sans faire de calcul explicite de $X(f)$:

- $X(f)$ est-elle périodique ? Si oui donner sa période.
- $X(f)$ est-elle un signal continu ou discret ?
- Donner la valeur de $X(0)$
- Donner $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$.



Théorème de Parseval

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux admettant pour TF $X(f)$ et $Y(f)$ respectivement.

$$\text{Théorème de Parseval: } \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)^* df$$

dans la cas particulier $y(t) = x(t)$ on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

➤ L'énergie est conservée dans la représentation temporelle et fréquentielle des signaux.

Exercice 3.9 utiliser le théorème de Parseval pour calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(t) dt \quad \text{où} \quad \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \text{ le sinus cardinal.}$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(2\pi t) \text{sinc}^2(t) dt$$