

I. Convolution des Signaux

Exercice 4.1 Convolution Soit le signal échelon unité $f(t) = E_0 \cdot u(t)$ d'amplitude E_0 , représenter graphiquement et calculer le produit de convolution de $f(t)$ par lui-même (auto-convolution).

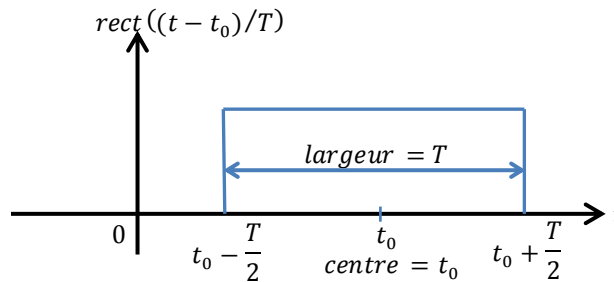
Exercice 4.2 Calculer l'intégrale de convolution des deux signaux suivants :

$$f(t) = e^{3t}u(t) \text{ et } g(t) = e^{7t}u(t), \quad u(t): \text{un échelon unité}$$

Exercice 4.3 Trouver l'intégrale de convolution des signaux causaux $\frac{1}{\sqrt{t}}$ et t^2 et calculer cette intégrale pour $t = 4$.

Exercice 4.4 On définit la fonction porte par : $\text{rect}(t/T) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$,

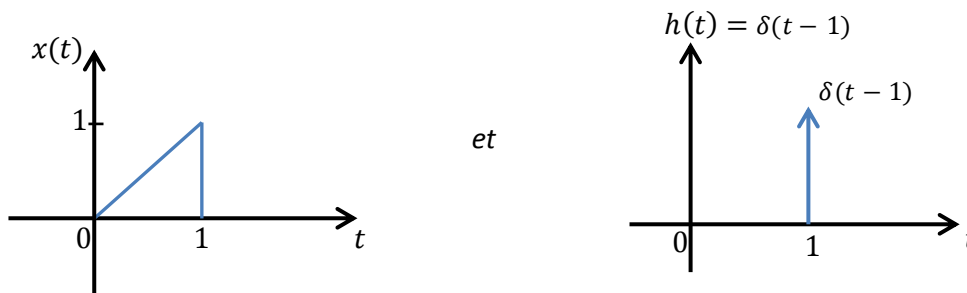
et d'une façon générale le graphe de $\text{rect}((t - \text{centre})/\text{largeur})$ est illustré par la figure ci-dessous,



Trouver la convolution $f(t) * g(t)$ des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ exprimées par :

$$f(t) = 3 \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{t - 2}{2}\right) \text{ et } g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right),$$

Exercice 4.5 Déterminer le signal $y(t) = x(t) * h(t)$, convolution de $x(t)$ et $h(t)$, donnés par leurs graphes suivants :



❖ Calcul de la convolution à l'aide de la transformée de Laplace

Il est très important de savoir calculer la transformée de Laplace d'un signal pour faciliter le calcul de la convolution entre deux signaux. On rappelle que pour deux signaux $f(t)$ et $g(t)$, on définit la transformée de Laplace, notée $\mathcal{L}[\cdot]$, par:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[g(t)] = G(p) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt} dt$$

On montre que $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(p).G(p)$ et que $f(t) * g(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p).G(p)]$

Exercice 4.6 Sachant que $\mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{p+a}$, $\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, calculer la convolution des signaux $f(t) = e^{-t}u(t)$ et $g(t) = \sin(t)$.

II. Auto et Inter-Corrélation des Signaux Déterministes

Exercice 4.01 Soient deux signaux réels $x(t)$ et $y(t)$ identiques à un retard et un affaiblissement près : $y(t) = a x(t - t_0)$. On connaît l'énergie de $x(t)$, $E_x = R_{xx}(0)$. Montrer comment peut-on déterminer l'affaiblissement a et le retard t_0 par inter-corrélation des deux signaux ?

Exercice 4.02 On se donne un signal réel $x(t)$, de fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$ et de densité spectrale $S_{xx}(f)$.

On demande pour $y(t) = x(t + t_0) - x(t - t_0)$ de :

- Calculer la fonction d'autocorrélation de $y(t)$.
- Calculer sa densité spectrale
- Traiter l'exemple où $x(t) = \text{rect}(t/T)$ et $t_0 = \frac{T}{2}$.

Exercice 4.03 Calculer et comparer les fonctions d'autocorrélation des deux signaux sinusoïdaux de base :

$$s_1(t) = A \sin(2\pi f_0 t) \quad \text{et} \quad s_2(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

On suppose que les spectres de ces 2 signaux sont connus et tels que :

$$S_1(f) = \frac{jA}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] \quad \text{et} \quad S_2(f) = \frac{A}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

Exercice 4.04 Effectuer graphiquement et analytiquement la convolution et la corrélation des 2 signaux suivants :

