

## TD. Transformée de Laplace

**Exercice 1.** Trouver le transformée de Laplace  $X(p)$  des isgnaux suivants :

- $x(t) = 2 u(t - 5)$
- $x(t) = 4 u(t - 1) - u(t - 2)$
- $x(t) = e^{-2t} u(t) + e^{-3t} u(t)$
- $x(t) = (e^{-2t} u(t)) * (u(t))$ ,    \*: symbole de la convolution

**Exercice 2.** En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace montrer que :

- $TL[f(t) = 3t^3 - 2t^2 + 7] = \frac{18}{p^4} - \frac{4}{p^3} + \frac{7}{p} = F(p)$
- $TL[g(t) = e^{-3t} + \sin(\sqrt{2}t)] = \frac{1}{p+3} + \frac{\sqrt{2}}{p^2+2} = G(p)$
- $TL[h(t) = -8 + \cos(t/2)] = -\frac{8}{p} + \frac{4p}{4p^2+1} = H(p)$
- $TL[7e^{2t} \cos(3t) - 2e^{7t} \sin(5t)] = \frac{7p}{(p-2)^2+9} - \frac{10}{(p-7)^2+25}$
- $TL[3t \sin(2t)] = \frac{12}{(p^2+4)^2} = -F'(p)$  où  $F(p) = TL[3 \sin(2t)]$
- $TL[(2 - t^2)e^{-5t}] = \frac{2}{p+5} - \frac{2}{(p+5)^3}$

**Exercice 3.** Trouver la transformée de Laplace inverse des transformées suivantes :

- $X(p) = \frac{p+1}{(p+2)(p+5)^2}$     **solution :**  $x(t) = -\frac{1}{9} e^{-2t} + \frac{1}{9} e^{-5t} + \frac{4}{3} t e^{-5t}$ .
- $Y(p) = \frac{2p+5}{p^2+6}$     **solution :**  $x(t) = 2 \cos(\sqrt{6}t) + \frac{5}{\sqrt{6}} \sin(\sqrt{6}t)$ .

**Exercice 4.** Trouver la transformée de Laplace inverse de :

- $X(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$     →    **solution :**  $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} - e^{-t}$
- $Y(p) = \frac{1}{p(p^2+9)}$     →    **solution :**  $y(t) = \frac{1 - \cos(3t)}{9}$
- $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)}$     →    **sol. :**  $f(t) = \frac{1}{2} (\sin(t) - \cos(t) + e^{-t})$

**Exercice 5.** En utilisant l'intégrale de convolution, montrer que :

$$\mathcal{TL}^{-1} \left\{ \frac{2p}{(p^2+1)^2} \right\} = t \sin(t)$$

**Exercice 6.** Appliquer le théorème de convolution pour résoudre l'équation intégrale suivante :

$$\text{chercher } f(t) ? \text{ telle que: } f(t) = 2 \cos(t) - \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau$$

$$\text{solution : } f(t) = 2 \cos(t) - t \sin(t)$$

**Exercice 7.** Utiliser la propriété de la transformée de Laplace de la dérivée et sachant que  $Y(p) = TL\{y(t)\}$  et  $X(p) = TL\{x(t)\}$ , pour déterminer  $\frac{Y(p)}{X(p)}$  pour les équations différentielles suivantes :

a.  $3 \frac{dy}{dt} + 2 y(t) = 5 x(t)$  , avec  $y(0) = 0$

b.  $4 \frac{d^2y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2 y(t) = 5 x(t)$  , avec  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$

**Solution :**

a.  $\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{5}{3p+2}$

b.  $Y(p) = \frac{1}{4p^2+3p+2}X(p) + \frac{4p+11}{4p^2+3p+2}$   
à cause des conditions initiales non nulles

**Exercice 8.** Résoudre l'équation différentielle d'ordre 2 avec conditions initiales suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2 y(t) = e^{-4t} , \quad \text{avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 5$$

**Solution :**

$$Y(p) = \frac{p+2}{p^2-3p+2} + \frac{1}{(p^2-3p+2)(p+4)} = \frac{p^2+6p+9}{(p-1)(p-2)(p+4)}$$

$$\rightarrow y(t) = TL^{-1}\{Y(p)\} = -\frac{16}{5} e^t + \frac{25}{6} e^{2t} + \frac{1}{30} e^{-4t}$$