I. Transformée en Z des Signaux Discrets

Rappel : la transformée en Z, *notée* TZ, d'un signal discret $x(n)$ est définie par :

$$\{x(n)\} \xrightarrow{TZ} \mathcal{Z}[x(n)] = \underbrace{\boldsymbol{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}}}_{\boldsymbol{Transformée\ en\ Z\ bilatérale}}$$

Si $x(n)$ est un signal causal on définit alors la transformée en Z unilatérale de $x(n)$ donné par :

$$\{x(n)\} \xrightarrow{TZ} \mathcal{Z}[x(n)] = \underbrace{\boldsymbol{X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}}}_{\boldsymbol{Transformée\ en\ Z\ unilatérale}}$$

Par la suite nous supposons tous les signaux sont causaux.

1. **Calculer la transformée en Z du signal suivant :**

$$x(n) = (0.5)^n\, u(n)$$

Solution :

Le signal $x(n) = (0.5)^n\, u(n) = [1, 0.5,\ 0.5^2,\ 0.5^3, \dots, 0.5^n, \dots \dots]$

En appliquant directement la définition de la transformée en Z, on trouve :

$$X(z) = 1 + 0.5z^{-1} + 0.5^2 z^{-2} + 0.5^3 z^{-3} + \dots + 0.5^n z^{-n} + \cdots$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0.5^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (0.5z^{-1})^n = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - 0.5z^{-1}}} \quad , |0.5z^{-1}| < 1 \ ou\ |z| > \mathbf{0.5}$$

- ***Propriété de la linéarité de la TZ :***

$$\boldsymbol{a\, h_1(n) + b\, h_2(n) \xrightarrow{TZ} a\, H_1(z) + b\, H_2(z) \quad avec\ ROC_H = ROC_{H_1} \cap ROC_{H_2}}$$

2. **Trouver $H(z)$ transformée en Z du signal discret $h(n)$ ainsi que la région de convergence ROC pour :**

$$h(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

Solution :

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} \quad \rightarrow ROC_{H_1} \ , |z| > \frac{1}{2}$$

$$H_2(z) = \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad \rightarrow ROC_{H_2} \;\; , |z| > \frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{H(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = H_1(z) + H_2(z)}$$

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) \quad \rightarrow \boldsymbol{ROC_H = ROC_{H_1} \cap ROC_{H_2}} \;, \qquad \boldsymbol{|z| > \frac{1}{2}}$$

- **En utilisant le théorème du retard, trouver la transformée en Z du signal suivant :**

$$\boldsymbol{h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u(n-2)}$$

Réponse :

$$\boldsymbol{H(z) = \frac{2z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad avec\ |z| > \frac{1}{2}}$$

- **En utilisant le théorème de dérivation dans Z, exprimé par :**

$$\boldsymbol{n\,x(n) \overset{TZ}{\Longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}}$$

calculer la T.Z du signal discret suivant :

$$\boldsymbol{h(n) = n\,u(n)}$$

Réponse :

$$\boldsymbol{H(z) = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}}$$

3. Déterminer la transformée en Z des signaux discrets suivants :

- $\boldsymbol{x(n) = n^2 + 3n + 2}$
- $\boldsymbol{y(n) = n.2^n}$
- $\boldsymbol{h(n) = (n-3)u(n-3)}$
- $\boldsymbol{g(n) = (n+2)^2}$

Réponses :

- $\boldsymbol{X(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{3z}{(z-1)^2} + \frac{2z}{(z-1)}}$
- $\boldsymbol{Y(z) = \frac{2z}{(z-2)^2}}$
- $\boldsymbol{H(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^2}}$
- $\boldsymbol{G(z) = \frac{z^3(z+1)}{(z-1)^3} - z}$

II. Transformée en Z Inverse

- Déterminer les signaux discrets causaux, par transformée en Z inverse, des expressions suivantes :

- $X_1(z) = \frac{4z}{(z-1)} - \frac{3z}{(z-1)^2}$ $\quad pour\ |z| > 1$
- $X_2(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-3)}$ $\quad pour\ |z| > 3$
- $X_3(z) = \frac{3}{(z-2)}$ $\quad pour\ |z| > 2$

Réponses :

- $x_1(n) = (4 - 3n)u(n)$
- $x_2(n) = (3^n - 1)u(n)$
- $x_3(n) = 3\ .2^{n-1}u(n-1)$

4. **Trouver $x(n)$ dont la T.Z est donnée par :**

$$X(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}, \qquad et\ ROC\ \ |z| > \frac{1}{2}$$

Solution :

Décomposition en éléments simples de $X(z)$:

- $X(z) = \frac{(1-2z^{-1})}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} = \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k}{1-\alpha_k z^{-1}} = \frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$

Calcul des coefficients A_1 et A_2 :

- $A_1 = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1-2(2)}{1-\frac{1}{3}(2)} = -9$
- $A_2 = \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1-2(3)}{1-\frac{1}{2}(3)} = 10$

Ainsi, on peut écrire :

$$X(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = -\frac{9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{10}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Ce qui donne par transformée en Z inverse, en utilisant la table des transformées en Z :

$$x(n) = -9\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 10\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Table des Propriétés de la transformée en Z

	Opérations dans le domaine discret	Propriété équivalente de la TZ
1	$a\,x(n)+b\,y(n)$	$a\,X(z)+b\,Y(z)$
2	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$
3	$x(n+k)$	$z^{k}X(z)\ \sum_{j=0}^{k-1} x(j)\,z^{k-j}$
4	Convolution : $x(n)*y(n)$	Multiplication :$X(z)\ \times Y(z)$
5	$a^n\,x(n)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
6	$n\,x(n)$	$-z\,\frac{dX(z)}{dz}$
7	$n^k\,x(n)$	$\left(-z\,\frac{d}{dz}\right)^k X(z)=-z\,\frac{d}{dz}\left[\left(-z\,\frac{d}{dz}\right)^{k-1} X(z)\right]$

Table de la Transformée en Z des Fonctions usuelles

Transformées en Z

	Signal $x(n)$	Transformée en Z $X(z)$	Domaine de convergence
1	$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
2	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
3	$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\|>1$
4	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
5	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
6	$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$
7	$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|<\|a\|$
8	$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
9	$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
10	$a^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|a\|$
11	$a^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|a\|$