Elements de réponse série CSP

1-modelisation 8 reines

première modélisation:

Les "inconnues" du problème sont les positions des reines sur l'échiquier. En numérotant les lignes et les colonnes de l'échiquier de la façon suivante

on peut déterminer la position d'une reine par un numéro de ligne et un numéro de colonne. Ainsi, une première modélisation consiste à associer à chaque reine *i* deux variables *Li* et *Ci* correspondant respectivement à la ligne et la colonne sur laquelle placer la reine. Les contraintes spécifient alors que les reines doivent être sur des lignes différentes, des colonnes différentes et des diagonales différentes. Notons pour cela que lorsque 2 reines sont sur une même diagonale montante, la somme de leurs numéros de ligne et de colonne est égale, tandis que lorsqu'elles sont sur une même diagonale descendante, la différence de leurs numéros de ligne et de colonne est égale. On en déduit le CSP suivant :

- Variables :

  X = {L1, L2, L3, L4, C1, C2, C3, C4}

- Domaines :

  D(L1) = D(L2) = D(L3) = D(L4) = D(C1) = D(C2) = D(C3) = D(C4) = {1,2,3,4}

- Contraintes : on identifie 4 types de contraintes
  - Les reines doivent être sur des lignes différentes.
    Clig = {L1ÍL2, L1ÍL3, L1ÍL4, L2ÍL3, L2ÍL4, L3ÍL4 }
  - Les reines doivent être sur des colonnes différentes.
    Ccol = {C1ÍC2, C1ÍC3, C1ÍC4, C2ÍC3, C2ÍC4, C3ÍC4 }
  - Les reines doivent être sur des diagonales montantes différentes.
    Cdm = {C1+L1ÍC2+L2, C1+L1ÍC3+L3, C1+L1ÍC4+L4, C2+L2ÍC3+L3, C2+L2ÍC4+L4, C3+L3ÍC4+L4}
  - Les reines doivent être sur des diagonales descendantes différentes.
    Cdd = {C1-L1ÍC2-L2, C1-L1ÍC3-L3, C1-L1ÍC4-L4, C2-L2ÍC3-L3, C2-L2ÍC4-L4, C3-L3ÍC4-L4}

  L'ensemble des contraintes est défini par l'union de ces 4 ensembles :

  C = Clig U Ccol U Cdm U Cdd

  Les contraintes Clig et Ccol sont des contraintes binaires ; les contraintes Cdm et Cdd sont des contraintes quaternaires. L'énumération de toutes ces contraintes est ici un peu fastidieuse. On peut tout aussi bien les définir de la façon suivante :

- Contraintes :
  - les reines doivent être sur des lignes différentes
    Clig = {Li Í Lj / i élément_de {1,2,3,4}, j élément_de {1,2,3,4} et i Í j}
  - les reines doivent être sur des colonnes différentes
    Ccol = {Ci Í Cj / i élément_de {1,2,3,4}, j élément_de {1,2,3,4} et i Í j}
  - les reines doivent être sur des diagonales montantes différentes
    Cdm = {Ci+LiÍCj+Lj / i élément_de {1,2,3,4}, j élément_de {1,2,3,4} et i Í j}

- o les reines doivent être sur des diagonales descendantes différentes
  *Cdd = {Ci-Li***Í** *Cj-Lj / i élément_de {1,2,3,4}, j élément_de {1,2,3,4} et i* **Í** *j}*

Les reines / Deuxième modélisation

Dans la mesure où l'on sait dès le départ qu'il y aura une reine et une seule sur chaque colonne de l'échiquier, le problème peut se résumer à déterminer sur quelle ligne se trouve la reine placée sur la colonne i. Par conséquent, une deuxième modélisation consiste à associer une variable Xi à chaque colonne i de telle sorte que Xi désigne le numéro de ligne sur laquelle placer la reine de la colonne i. Notons que pour cette deuxième modélisation, on a été obligé de "réfléchir" un peu pour introduir dans la modélisation une déduction (il y a une seule reine par colonne) qui, on l'espère, va faciliter le travail de la machine. Le CSP correspondant à cette deuxième modélisation est le suivant :

- Variables :

  X = {X1,X2,X3,X4}

- Domaines :

  D(X1) = D(X2) = D(X3) = D(X4) = {1,2,3,4}

- Contraintes :
  - o les reines doivent être sur des lignes différentes
    Clig = {Xi **Í** *Xj / i élément_de {1,2,3,4}, j élément_de {1,2,3,4} et i* **Í** *j}*
  - o les reines doivent être sur des diagonales montantes différentes
    Cdm = {Xi+i **Í** *Xj+j / i élément_de {1,2,3,4}, j élément_de {1,2,3,4} et i* **Í** *j}*
  - o les reines doivent être sur des diagonales descendantes différentes
    Cdd = {Xi-i **Í** *Xj-j / i élément_de {1,2,3,4}, j élément_de {1,2,3,4} et i* **Í** *j}*

  L'ensemble des contraintes est défini par l'union de ces 3 ensembles

  C = Clig U Cdm U Cdd

Les reines / Troisième modélisation

Une autre façon, radicalement opposée, de modéliser le problème consiste à choisir comme variables non pas les positions des reines, mais les états des cases de l'échiquier : on associe une variable à chacune des 16 cases de l'échiquier (on notera Xij la variable associée à la case située ligne i et colonne j) ; chaque variable peut prendre pour valeur 0 (s'il n'y a pas de reine sur la case) ou 1 (s'il y a une reine sur la case) ; les contraintes spécifient qu'il ne peut y avoir plusieurs reines sur une même ligne, une même colonne ou une même diagonale. Le CSP correspondant à cette troisième modélisation est le suivant :

- Variables :

  X = { X11, X12, X13, X14, X21, X22, X23, X24, X31, X32, X33, X34, X41, X42, X43, X44}

- Domaines :

  D(Xij) = {0,1} pour tout i et tout j compris entre 1 et 4

- Contraintes :

- il y a une reine par ligne
  Clig = {Xi1 + Xi2 + Xi3 + Xi4 = 1 / i élément_de {1,2,3,4}}
- il y a une reine par colonne
  Ccol = {X1i + X2i + X3i + X4i = 1 / i élément_de {1,2,3,4}}
- les reines doivent être sur des diagonales montantes diférentes
  Cdm = pour tout couple de variables différentes Xij et Xkl, i+j=k+l => Xij + Kkl **Ò***1*
- les reines doivent être sur des diagonales descendantes différentes
  Cdd = pour tout couple de variables différentes Xij et Xkl, i-j=k-l => Xij + Kkl **Ò***1*

L'ensemble des contraintes est défini par l'union de ces 4 ensembles

C = Clig U Ccol U Cdm U Cdd

Retour de Monnaie

On définit le CSP (X,D,C) tel que

- *X = {XE2, XE1, XC50, XC20, XC10}*

  où *XE2* désigne le nombre de pièces de 2 Euros à retourner, *XE1* désigne le nombre de pièces de 1 Euro à retourner, ...

- Les domaines spécifient que la quantité de pièces retournées, pour un type de pièce donné, est comprise entre 0 et le nombre de pièces de ce type que l'on a en réserve :

  D(XE2) = {0,1,...,E2}
  D(XE1) = {0,1,...,E1}
  D(XC50) = {0,1,...,C50}
  D(XC20) = {0,1,...,C20}
  D(XC10) = {0,1,...,C10}

- Les contraintes spécifient que la somme à retourner doit être égale à la somme insérée moins le prix à payer :

  C = { 200*XE2 + 100*XE1 + 50*XC50 + 20*XC20 + 10*XC10 = T-P *}*

Dans cette modélisation, nous avons utilisé une contrainte arithmétique linéaire sur les entiers. Cette contrainte est globale dans le sens où elle fait intervenir toutes les variables du problème. Une autre modélisation possible consisterait à définir le domaine des variables par l'ensemble des entiers positifs ou nuls, et d'ajouter en contraintes que la quantité de pièces retournées doit être inférieure ou égale au nombre de pièces en réserve (pour chaque type de pièce différent).

Pour exprimer le fait que l'on souhaite que le distributeur rende le moins de pièces possibles, on pourrait ajouter à ce CSP une fonction "objectif" à minimiser

f(X) = XE2 + XE1 + XC50 + XC20 + XC10

Dans ce cas, résoudre le CSP revient à chercher une affectation de *X* complète et consistante qui minimise *f*(X).

coloriage d'une carte:

On définit le CSP (X,D,C) tel que

X = {X1, X2, ..., X14}

(On associe une variable Xi différente par région i à colorier.)

pour tout Xi élément de X, D(Xi) = { bleu, rouge, vert, jaune }

(Chaque région peut être coloriée avec une des 4 couleurs.)

C = { Xi Í Xj / Xi et Xj sont 2 variables de X correspondant à des régions voisines }

(2 régions voisines doivent être de couleurs différentes.)

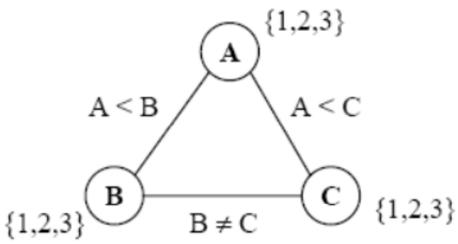
Pour être plus précis, on peut définir explicitement les relations de voisinage entre régions, par exemple à l'aide d'un prédicat voisines/2, tel que voisines(X,Y) soit vrai si X et Y sont deux régions voisines. Ce prédicat peut être défini ***en extension***, en listant l'ensemble des couples de régions ayant une frontière en commun :

voisines(X,Y) <=> (X,Y) élément-de {(1,7), (1,9), (1,10), (1,11), (1,12), (1,13), (2,8), (2,12), (2,14), (3,7), (3,10), (3,14), (4,9), (4,11), (4,14), (5,8), (5,11), (5,12), (6,7), (6,13), (6,14), (7,1), (7,3), (7,6), (7,10), (7,13), (7,14), (8,2), (8,5), (8,12), (9,1), (9,4), (9,10), (9,11), (10,1), (10,3), (10,7), (10,9), (10,14), (11,1), (11,4), (11,5), (11,9), (11,12), (12,1), (12,2), (12,5), (12,8), (12,11), (12,13), (12,14), (13,1), (13,6), (13,7), (13,12), (13,14), (14,2), (14,3), (14,4), (14,6), (14,7), (14,10), (14,12), (14,13)}

on peut alors définir l'ensemble des contraintes C de la façon suivante :
C = { Xi Í Xj / Xi et Xj sont 2 variables différentes de X et voisines(Xi,Xj) = vrai }

Ce problème de coloriage d'une carte est un cas particulier du problème du coloriage des sommets d'un graphe (deux sommets adjacents du graphe doivent toujours être de couleurs différentes). De nombreux problèmes "réels" se ramènent à ce problème de coloriage d'un graphe : problème des examens, d'emploi du temps, de classification, ..

exercice



a) Montrez toutes les étapes de lôalgorithme de cohérence des arcs sur ce problème. Vous devez identifier tous les arcs qui sont vérifiés et montrer les changements aux domaines de valeur des variables à chaque étape.

Domaine A	Domaine B	Domaine C	Arcs à vérifier
{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	A-B, A-C, B-A, B-C, C-A, C-B
{1,2}			A-C, B-A, B-C, C-A, C-B
	{2,3}		B-A, B-C, C-A, C-B
			B-C, C-A, C-B, A-B
		{2,3}	C-A, C-B, A-B
			C-B, A-B, A-C
			A-B, A-C
			A-C

Les domaines de valeurs à la fin de l'algorithme sont donc: $D_A = \{1,2\}$, $D_B = \{2,3\}$ et $D_C = \{2,3\}$.

b) Trouvez une solution à ce problème en utilisant lôalgorithme de recherche en avant (forward checking). Utilisez lôheuristique MRV pour choisir les variables. Sôil y a des égalités entre les variables, choisissez-les dans lôordre alphabétique inverse. Les valeurs sont essayées en ordre croissant.

A	B	C
{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}
{}	{2,3}	1
Erreur, on fait un retour arrière et on essaie une autre valeur.		
{1}	{1,3}	2
1	{3}	2
1	3	2

solution trouvée est A=1, B=3, C=2

c) Trouvez une solution à ce problème en utilisant lôalgorithme min-conflict. Sôil y a des égalités entre les variables, choisissez-les dans lôordre alphabétique inverse. Les valeurs sont essayées en ordre croissant.
Commencez avec la configuration initiale : A = 2, B = 3 et C = 3.

A	B	C	
2	3	3	Les variables B et C sont en conflits. Il faut donc changer une des valeurs de ces variables. Il y a quatre possibilité : B = 2 (1 conflit), B = 1 (1 conflit), C = 2 (1 conflit), C = 1 (1 conflit). Les quatre sont égales, donc on en prend C = 1, parce que c'est l'ordre définit pour la question en cas d'égalité.
2	3	1	Les variables A et C sont en conflits. Il faut donc changer une des valeurs de ces variables. Il y a quatre possibilité : A = 1 (1 conflit), A = 3 (2 conflits), C = 2 (1 conflit), C = 3 (1 conflit). Il y a trois possibilité égales, donc on prend C = 2.
2	3	2	Les variables A et C sont en conflits. Il faut donc changer une des valeurs de ces variables. Il y a quatre possibilité : A = 1 (0 conflit), A = 3 (2 conflits), C = 1 (1 conflit), C = 3 (1 conflit). Donc on choisit A = 1.
1	3	2	Aucun conflit. C'est la solution qui est trouvée.

solution trouvée A=1, B=3, C=2.