**TD2 (Partie 1) : CANAUX DISCRETS**

**CODAGE ET COMPRESSION MASTER 1 RT ET ST**

**Rappel de cours**

* Un canal discret est soumis à des perturbations aléatoires et souvent il véhicule des données numériques que l’on peut aussi qualifier d’aléatoires, ce qui justifie l’utilisation de modèles mathématiques stochastiques pour représenter ce type de canaux.

* Un canal discret peut être alors représenté par le triplet :
	+ X : l’ensemble des symboles délivrés par la source
	+ Y : l’ensemble des symboles reçus par le destinataire
	+ Π : La matrice de transition stochastique (probabilités conditionnelles) qui modélise le canal



* Un canal symétrique est un canal dont les lignes de sa matrice de transition sont formées des mêmes éléments à l’ordre près, tout comme ses colonnes
	+ Exemple d’un canal symétrique : La canal binaire symétrique ou BSC (Binary Symmetric Channel), décrit ci-dessous :





* Pour caractériser et modéliser un canal discret nous sommes tentés d’utiliser l’information mutuelle I(X,Y) entre l’entrée du canal X et la sortie du canal Y

* On note bien que H(X/Y), l’information qu’apporte Y sur la source X, représente les imperfections du canal. Autrement dit, H(X/Y) représente l’ambigüité ou l’incertitude qui reste sur X pour Y connu. D’autant que H(X/Y) est grande d’autant que le canal est bruité ou hostile.
* Mais l’information mutuelle I(X;Y) ne peut pas caractériser le canal de façon intrinsèque. Car elle dépend surtout des lois de probabilité de X et de Y (surtout de la loi X).
* Il est donc plus intéressant d’utiliser la Capacité C comme caractérisation du canal. Cp est le maximum d’information que peut apporter le canal de transmission.

**Exercice 1**

Deux canaux binaires symétriques (BSC) identiques sont mis en cascade (en série) comme le montre la figure ci-dessous.

**1-p**

**1-p**

****

**Y**

**X**

**1-p**

**p**

**p**

**p**

**1-p**

**p**

* Rappelez l’expression de l’entropie de la source H(X) en supposant que P(0)=p0 et P(1)=1-p0. Donnez la valeur de cette entropie pour p0=0.1 , 0.5 et 0.8.
* Trouvez la matrice de transition globale pour p=0.1
* Calculez P(Y=0) et P(Y=1) pour p0=0.5 et p=0.1
* Calculez la capacité résultante pour p=0.1 et p0=0.5

**Solution Exercice 1**

* Pour une source binaire l’entropie est donnée par :

H(X) =−p0Log2 p0−(1− p0) Log2 (1− p0),

Comme rappelle **Log2(x)=log10(x)/log10(2).**

Pour p0=0.1 nous aurons H(X)=-0.1Log20.1 – 0.9Log20.9 = 0,33 + 0,14 = 0,47

Pour p0=0.5 nous aurons H(X)=-0.5Log20.5 – 0.5Log20.5 = - Log20.5 = 1

Pour p0=0.8 nous aurons H(X)=-0.8Log20.8 – 0.2Log20.2 = 0.26 + 0.46 = 0.72

En effet, l’entropie d’une source est maximale pour une loi de probabilité uniforme et elle est égale à H(X)=Log2(K) où K ets le nombre de symbole de la source. Dans notre cas K=2 ce qui nous donne pour une loi uniforme (p0=0.5 et 1-p0=0.5) H(X)=Log2(2)=1

* Il s’agit de deux BSC identiques en cascade. Pour trouver la matrice de transition globale, rappelons la matrice d’un seul BSC (où l’entrée est X et sa sortie est Z) :



Ce qui signifie que :

P(Z=0) = P(X=0)(1-p) + P(X=1)p et P(Z=1) = P(X=0)p + P(X=1)(1-p)

Le 2ème BSC, en cascade, aura pour entrée Z et la sortie Y, donc

P(Y=0) = P(Z=0)(1-p) + P(Z=1)p et P(Y=1) = P(Z=0)p + P(Z=1)(1-p)

Pour le canal résultant des deux BSC mis en cascade, nous aurons alors

P(Y=0) = [ P(X=0)(1-p) + P(X=1)p](1-p) + (P(X=0)p + P(X=1)(1-p)] p =

P(X=0) [(1-p)2 +p2] + P(X=1)2p(1-p)

P(Y=1) = [P(X=0)(1-p) + P(X=1)p]p + [P(X=0)p + P(X=1)(1-p)](1-p) =

P(X=0)2p(1-p) + P(X=1)(1-p)2p2



Pou p=0.1 nous aurons :



**P(0)=0.5**

**P(0)=0.5**

**P(0)=0.5**

**0.9**

**0.9**

****

**P(1)=0.5**

**P(1)=0.5**

**Y**

**P(1)=0.5**

**X**

**0.1**

**0.1**

**0.9**

**0.1**

**0.9**

**0.1**

* Comme le canal résultant est un aussi un BSC, alors si l’entrée X est uniforme la sortie l’est aussi. C'est-à-dire P(Y=0) = P(Y=1) = 0.5

On peut le vérifier en utilisant la matrice de transition calculée ci-dessus

* D’après le résultat obtenu ci-dessus (la matrice de transition des deux BSC en cascade) on voit bien qu’il est équivalent à un BSC résultant avec p1=0.18 et 1-p1=0.82

****

Maintenant, nous pouvons calculer la capacité du canal BSC résultant comme nous l’avons vu dans le cours, et nous obtenons :

**Cp= 1 + (1−p1)Log2(1−p1) +p1log2p1 bits/symbole**

**Cp = 1 + 0.82 Log2(0.82) + 0.18Log2(0.18]**

On remarque que la capacité obtenue par rapport à deux BSC identiques en cascade est plus faible que celle d’un seul BSC. Ce qui est tout à fait logique, car les erreurs augmentent au fur et à mesure que le nombre de canaux augmente.

**Exercice 2**

Supposons qu'un canal symétrique binaire (**BSC**) de capacité C1, dont l’entrée X est un alphabet composé de deux symboles {0,1} avec les probabilités respectives P(0)=p0 et P(1)=1-p0 , soit immédiatement suivi d'un canal d'effacement binaire (**BEC** [Binary erasure channel](https://www.google.dz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjYsZCwxfbZAhVPnRQKHdH0DSEQFgglMAA&url=https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_erasure_channel&usg=AOvVaw2reQV2otsCKkoh2E1VbHVc)) de capacité C2, qui va nous délivrer à la sortie l’alphabet Y composé des symboles suivants {0, e, 1}.

* Calculer en fonction de p0 l’entropie H(X) et rappelez son tracé.
* Trouvez la matrice de transition Π et dites si ce canal est symétrique:
* Trouvez la capacité C du canal résultant, avec p0=p=0.5.

**1-p**

**1-p**



**1-p**

**p**

**p**

**1-p**

**p**

**p**

**Solution exercice 2**

* L’entropie de l’entrée H(X) est donnée par la formule connue :

H(X) = -[p0Log2(p0) + (1-p0)Log2(1-p0)]

On rappelle la courbe H(X) en fonction de p0



L’entropie est maximale égale à 1 pour p0=0.5 (les deux symboles de la source sont équiprobables) et elle est nulle pour H(0)=H(1)=0

* Les deux canaux discrets BSC et BEC sont en cascade. Nous connaissons leurs matrices de transition respectives que nous noterons ∏1 et ∏2





La matrice de transition ∏ est le produit des deux matrices de transition ∏1 et ∏2





Le canal résultat est bien symétrique, où plutôt quasi-symétrique (voir le cours) car cette matrice de transition peut être partitionnées en sous-ensembles de telle manière que dans chaque sous-ensemble, les lignes sont des permutations les unes des autres et il en est de même pour les colonnes

* Pour le calcul de la capacité du canal résultat, où p0=p=0.5, nous avons :

**0.5**

**P(0) = 0.25**

**0.5**

**P(0) = 0.5**



**P(1) = 0.25**

**P(e) = 0.5**

**0.5**

**P(0) = 0.5**

**0.5**

**P(1) = 0.5**

**P(0) = 0.5**

**0.5**

**0.5**

**0.5**

**0.5**

La matrice de transition ∏ est composée des probabilités conditionnelle P(Yj/Xi) (respectivement P(Xi/Yj)), nous pouvons donc utiliser l’expression suivante pour calculer la capacité du canal

Où : H(X) = 1 et



Commençons par calculer : **P(Xi,Yj) = P(Yj/Xi)×P(Xi)= P(Yj/Xi)×p0 = P(Yj/Xi)×0.5**



La relation entre la probabilité conjointe, entre deux variables aléatoires X et Y, P(X,Y) et la probabilité conditionnelle P(Y/X) (respectivement P(X/Y)) est donnée par :

**P(Y=yj/X=xi) = P(X,Y)/P(X=xi) (1)**

**P(X=xi /Y=yj) = P(X,Y)/P(Y=yj) (2)**

Où P(X,Y) est la probabilité conjointe

P(Y/X) et P(X/Y) sont les probabilités conditionnelles

P(X=xi) et P(Y=yj) sont respectivement les probabilité marginales de X et de Y.

P(Y=yj/X=xi) est donnée par la matrice de transition. Dans le cas de l’exercice 4 nous avons trouvé :



Les deux lois marginales du couple (X,Y) sont les lois des variables aléatoires X et Y. On les obtient de la façon suivante :

**P(X=xi) = ∑ P(X=xi,Y=yj) (3)**

j

**P(Y=yi) = ∑ P(X=xi,Y=yj) (4)**

i

Dans notre cas, P(X=xi) et P(Y=yi) sont respectivement les probabilités de l’entrée et de la sortir du canal

Nous avons les probabilités conditionnelles données par la matrice de transition, à savoir :

P(Y=y1/X=x1)=0.25, P(Y=y2/X=x1)=0.5, P(Y=y3/X=x1)=0.25,

P(Y=y1/X=x2)=0.25, P(Y=y2/X=x2)=0.5, P(Y=y3/X=x2)=0.25,

L’alphabet de l’entrée est donné par une variable aléatoire X de deux symboles avec une probabilité marginale P(X=0)=p0 = 0.5, P(X=1)=1-p0=0.5. On applique la formule (1), ce qui nous donne :

P(X=x1,Y=y1) = P(Y=y1/X=x1)× P(X=0) = 0.25 ×0.5=0.125

P(X=x1,Y=y2) = P(Y=y2/X=x1)× P(X=0) = 0.5 ×0.5=0.25

P(X=x1,Y=y3) = P(Y=y3/X=x1)× P(X=0) = 0.25 ×0.5=0.125

P(X=x2,Y=y1) = P(Y=y1/X=x2)× P(X=1) = 0.25 ×0.5=0.125

P(X=x2,Y=y2) = P(Y=y2/X=x2)× P(X=1) = 0.5 ×0.5=0.25

P(X=x2,Y=y3) = P(Y=y3/X=x2)× P(X=1) = 0.25 ×0.5=0.125

Ce qui nous permet d’écrire à la fin



Nous pouvons également vérifier à partir de ces probabilités conjointes, les relations qui doivent exister avec les probabilités marginales P(X=xi) et P(Y=Yj) à savoir (formules (3) et (4))

**P(X=xi) = ∑ P(X=xi,Y=yj)**

j

**P(X=0) = ∑ P(X=0,Y=yj) = 0.125 + 0.25 + 0.125 = 0.5**

j

**P(X=1) = ∑ P(X=1,Y=yj) = 0.125 + 0.25 + 0.125 = 0.5**

j

De même pour les probabilités marginales de P(Y=yj) nous avons :

**P(Y=yi) = ∑ P(X=xi,Y=yj)**

i

**P(Y=0) = ∑ P(X=xi,Y=0) = 0.125 + 0.125 = 0.25**

i

**P(Y=e) = ∑ P(X= xi,Y=1) = 0. 25 + 0.25 = 0.5**

i

**P(Y=1) = ∑ P(X=xi,Y=0) = 0.125 + 0.125 = 0.25**

i

Ce qui est en parfaite concordance avec ce que nous avons mis au tout début (dans le schéma) à propos de P(X) et P(Y)

***Remarque : En réalité On a coutume de représenter la loi conjointe (X,Y) à l'aide d'un tableau (au lieu de parler d’une matrice):***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **P(X,Y)** | **P(X=xi) =**  |
|  | **0.125** | **0.25** | **0.125** | **P(X=0) = 0.5** |
|  | **0.125** | **0.25** | **0.125** | **P(X=1) = 0.5** |
| **P(Y=yj) =**  | **P(Y=0) = 0.25** | **P(Y=e) = 0.5** | **P(Y=1) =0.25** |  |

**On déduit ensuite la densité de probabilité marginale P(Yj), par :**

****

**P(Yj) = {0.25, 0.5,0.25}**

**H(Y/X) = -[4×0.125Log2(0.125) + 2×0.25Log2(0.25)] = 0.5×3 + 0.5×2 =2.5**

**On rappelle que : Log2(x)=log10(x)/log10(2).**

H(X;Y) =H(Y) − H(Y|X) avec, H(Y|X) =∑ p(x)H(Y|X=x).

**x**

H(Y|X=x) =−∑ p(y|x) **Log2**p(y|x)

y

**Exercice 3**

Pour les deux canaux discrets décrits ci-dessous, trouvez la matrice de transition et la capacité en supposant toujours que l’entrée X est équiprobable.





**Exercice 4**

Soit deux canaux discrets représentés ci-dessous :

**P(X0)=0.2**

**X0**

**0.7**

**Y2**

**Y1**

**0.8**

**Y0**

**Y0**

**X0**

**P(Y0)=0.3**

**P(X0)=0.2**

**P(Y1)=0.08**

**Y1**

**0.8**

**X1**

**Y2**

**X1**

**Canal 2**

**Canal 1**

1. Complétez les probabilités manquantes
2. Trouvez leurs matrices de transitions ainsi que leurs matrices de probabilités conjointes

**Solution Exercice 4**

1. Il suffit de vérifier que la somme des probabilités, aussi bien au niveau de l’entrée (l’émetteur) qu’au niveau du récepteur (sortie) soit égale à 1 et en tenant compte de la relation entre les probabilités conditionnelles (matrice de transition) et les probabilités marginales de X et de Y.

**Canal1**

P(Y0) = P(Y0/X0)P(X0) + P(Y0/X1)P(X1) ; P(Y1) = P(Y1/X0)P(X0) ; P(Y2) = P(Y2/X1)P(X1)

P(Y0) = 0.7×0.2 + P(Y0/X1)P(X1) ; P(Y1) = P(Y1/X0)P(X0) P(Y2) = P(Y2/X1)P(X1)

P(X0) + P(X1) = 1 ; P(Y0) + P(Y1) + P(Y2) = 1  ; P(Y0/X0) + P(Y1/X0) = 1

P(Y0/X1) + P(Y1/X1) = 1

⇒ P(X1) = 0.8 ; P(Y1/X0) = 0.3 ; P(Y1) = 0.06 ; P(Y2) = 0.64 ; P(Y2/X1) = 0.8

P(Y0/X1) = 0.2

Donc P(Xi) = {0.2, 0.8} et P(Yj) = {0.3, 0.06, 0.64}

**Canal2 :** Même raisonnement

**P(Y0)=0.24**

**0.7**

**P(X0)=0.2**

**X0**

**Y2**

**Y1**

**0.8**

**Y0**

**Y0**

**X0**

**0.2**

**0.3**

**P(Y0)=0.3**

**P(X0)=0.2**

**0.1**

**P(Y1)=0.06**

**0.2**

**P(Y1)=0.08**

**Y1**

**0.1**

**0.8**

**P(Y2)=0.68**

**P(Y2)=0.64**

**P(X1)=0.8**

**0.8**

**X1**

**Y2**

**X1**

**P(X1)=0.8**

**Canal 2**

**Canal 1**

**Canal1**

La matrice de transition (matrice des probabilités conditionnelles) et la matrice des probabilités conjointes sont données ci-dessous





**Canal2**

La matrice de transition (matrice des probabilités conditionnelles) et la matrice des probabilités conjointes sont données ci-dessous





A propos des tableaux de probabilités conjointes

La relation entre la probabilité conjointe, entre deux variables aléatoires X et Y, P(X,Y) et la probabilité conditionnelle P(Y/X) (respectivement P(X/Y)) est donnée par :

**P(Y=yj/X=xi) = P(X,Y)/P(X=xi) (1)**

**P(X=xi /Y=yj) = P(X,Y)/P(Y=yj) (2)**

Où P(X,Y) est la probabilité conjointe

P(Y/X) et P(X/Y) sont les probabilités conditionnelles

P(X=xi) et P(Y=yj) sont respectivement les probabilité marginales de X et de Y.

P(Y=yj/X=xi) est donnée par la matrice de transition. Dans le cas de l’exercice 4 nous avons trouvé :

Les deux lois marginales du couple (X,Y) sont les lois des variables aléatoires X et Y. On les obtient de la façon suivante :

**P(X=xi) = ∑ P(X=xi,Y=yj) (3)**

j

**P(Y=yi) = ∑ P(X=xi,Y=yj) (4)**

i

Dans notre cas, P(X=xi) et P(Y=yi) sont respectivement les probabilités de l’entrée et de la sortir du canal

**Canal1**



P(X0)=0.2 et P(X1)=0.8

Nous avons les probabilités conditionnelles données par la matrice de transition, à savoir :

P(Y=y0/X=x0)=0.7, P(Y=y1/X=x0)=0.3, P(Y=y2/X=x0)=0,

P(Y=y0/X=x1)=0.2, P(Y=y1/X=x1)=0, P(Y=y2/X=x1)=0.8,

L’alphabet de l’entrée est donné par une variable aléatoire X de deux symboles avec une probabilité marginale P(X0)=0.2, P(X1)=0.8. On applique la formule (1), ce qui nous donne :

P(X0,Y0) = P(Y0/X0)× P(X0) = 0.7 ×0.2=0.14

P(X0,Y1) = P(Y1/X0)× P(X0) = 0.3 ×0.2=0.06

P(X0,Y2) = P(Y2/X0)× P(X0) = 0 ×0.2=0

P(X1,Y0) = P(Y0/X1)× P(X1) = 0.2 ×0.8= 0,16

P(X1,Y1) = P(Y1/X1)× P(X1) = 0 ×0.8=0

P(X1,Y2) = P(Y2/X1)× P(X1) = 0.8 ×0.8=0.64

Ce qui nous permet d’écrire à la fin



***Pour vérifier nos calculs essayons de retrouver les probabilités marginales P(X) et P(Y) à partir des probabilités conjointes (formules 3 et 4)***

***Remarque : En réalité On a coutume de représenter la loi conjointe (X,Y) à l'aide d'un tableau (au lieu de parler d’une matrice):***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **P(X,Y)** | **P(X=xi) =**  |
|  | **0.14** | **0.06** | **0** | **P(X=0) = 0.14 + 0.06 + 0 = 0.2** |
|  | **0.16** | **0** | **0.64** | **P(X=1) = 0.16 + 0 + 0.64 = 0.8** |
| **P(Y=yj) =**  | **P(Y=0) = 0.14 + 0.16 = 0.3** | **P(Y=e) = 0.06 + 0 = 0.06** | **P(Y=1) = 0 + 0.64 = 0.64** |  |

**Canal2**



P(X0)=0.2 et P(X1)=0.8

Nous avons les probabilités conditionnelles données par la matrice de transition, à savoir :

P(Y=y0/X=x0)=0.8, P(Y=y1/X=x0)=0, P(Y=y2/X=x0)=0.2,

P(Y=y0/X=x1)=0.1, P(Y=y1/X=x1)=0.1, P(Y=y2/X=x1)=0.8,

L’alphabet de l’entrée est donné par une variable aléatoire X de deux symboles avec une probabilité marginale P(X0)=0.2, P(X1)=0.8. On applique la formule (1), ce qui nous donne :

P(X0,Y0) = P(Y0/X0)× P(X0) = 0.8 ×0.2=0.16

P(X0,Y1) = P(Y1/X0)× P(X0) = 0 ×0.2=0

P(X0,Y2) = P(Y2/X0)× P(X0) = 0.2 ×0.2=0.04

P(X1,Y0) = P(Y0/X1)× P(X1) = 0.1 ×0.8= 0,08

P(X1,Y1) = P(Y1/X1)× P(X1) = 0.1 ×0.8=0.08

P(X1,Y2) = P(Y2/X1)× P(X1) = 0.8 ×0.8=0.64

Ce qui nous permet d’écrire à la fin



***Pour vérifier nos calculs essayons de retrouver les probabilités marginales P(X) et P(Y) à partir des probabilités conjointes (formules 3 et 4)***

***Remarque : En réalité On a coutume de représenter la loi conjointe (X,Y) à l'aide d'un tableau (au lieu de parler d’une matrice):***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **P(X,Y)** | **P(X=xi) =**  |
|  | **0.16** | **0** | **0.04** | **P(X=0) = 0.16 + 0 + 0.04 =0.2** |
|  | **0.08** | **0.08** | **0.64** | **P(X=1) = 0.08 + 0.08 + 0.64 = 0.8** |
| **P(Y=yj) =**  | **P(Y=0) = 0.16 + 0.08 = 0.24** | **P(Y=e) = 0 + 0.08 = 0.08** | **P(Y=1) = 0.04 + 0.64 = 0.68** |  |

**Exercice 5**

Considérons un canal de communication symétrique binaire, dont la source d'entrée est l'alphabet X = {0,1} avec des probabilités {0,5, 0,5}; dont l'alphabet de sortie est Y = {0,1}; et dont la matrice de transition du canal est :



Où ∈ est la probabilité de transmission d’une erreur

1. Donnez le schéma de ce canal
2. Calculez l’entropie de la source H(X)
3. Quelle est la distribution de probabilité des sorties, p(Y), et l'entropie de cette distribution des sorties, H (Y)?
4. Quelle est la distribution de probabilité conjointe pour la source et la sortie, P(X, Y), et quelle est l'entropie conjointe, H (X, Y)?
5. Quelle est l'information mutuelle de ce canal, I (X; Y)?
6. Combien de valeurs y a-t-il pour ∈ pour lesquelles l'information mutuelle de ce canal est maximale? Quelles sont ces valeurs et quelle est alors la capacité d'un tel canal en bits?
7. Pour quelle valeur de ∈ la capacité de ce canal est-elle minimale? Quelle est la capacité du canal dans ce cas?

**Solution Exercice 5**

1. Il s’agit tout simplement d’un schéma d’un canal BSC



1. Comme la source ici est équiprobable (même probabilité pour les symboles 0 et 1) alors nous avons une entropie maximale égale à :

**H(X) = Hmax(X) = - Log2(0.5) = 1 bit**

1. Comme il s’agit d’un BSC dont l’entrée suit une loi uniforme, la sortie aussi aura la même loi uniforme

p(Y= 0) = (0.5)(1−∈) + (0.5) ∈= 0.5

p(Y= 1) = (0.5)(1−∈) + (0.5) ∈= 0.5.

On déduit donc H(Y) = H(X) = 1 bit

1. la distribution de probabilité conjointe P(X,Y) est :

****

L’entropie conjointe est donnée par la formule ci-dessous



Soit : H(X,Y) = =−(1−∈) log(0.5(1−∈))−∈log(0.5∈) = (1−∈)−(1−∈) log(1−∈) +∈−∈log(∈)= 1−∈log(∈)−(1−∈) log(1−∈)

1. L’information mutuelle I(X,Y) est donnée par :

I(X;Y) =H(X) +H(Y)−H(X, Y) = 1 +∈log(∈) + (1−∈) log(1−∈).

1. Dans les deux cas de ∈ = 0 et ∈ = 1, respectivement transmission parfaite et transmission complètement erronée, l'information mutuelle atteint son maximum de 1 bit et c'est aussi alors la capacité du canal.
2. Si ∈ = 0,5, la capacité du canal est minimale et égale à 0.