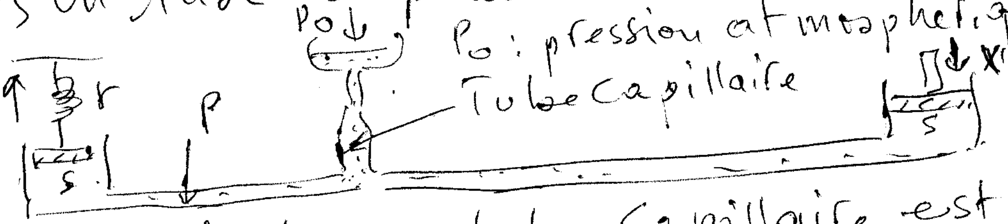
Actionneur hydraulique (Asim)

Exercice : "Système hydro-Mécanique"

On considère le système hydraulique représenté par le schéma suivant. Deux cylindres de même section s "sont reliés par une canalisation sans perte de charge qui est en communication avec la pression atmosphérique" à travers un tube capillaire.



Le débit d'huile dans ce tube capillaire est régi par la loi de Poiseuille : il est proportionnel à la différence de pression d'huile des 2 extrémités :

$$Q_c = \frac{dq}{dt} = K(P - P_0)$$

Le déplacement du piston X constitue l'entrée du système. Le piston Y est lié au bâti par un ressort de raideur r. On ne tient pas compte de la masse des pistons et de celle de l'huile.

1°) Calculer la fonction de transfert $Y(P)/X(P)$

2°) Calculer la réponse à un échelon unitaire $x(t) = u(t)$. Interpréter physiquement cette réponse transitoire. Quelle est la position d'équilibre ?

3°) Tracer la réponse de $y(t)$ à une entrée $x = t\,u(t)$. Quelle est le régime définitif, et la valeur

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^+} = ?$$

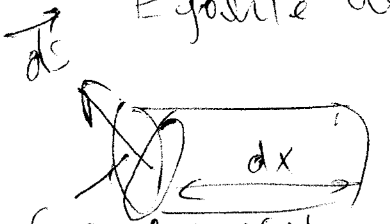
4°) Tracer la réponse permanente à une entrée sinusoïdale $x(t) = \sin \omega t$, avec $\omega = \frac{K.r}{S^2}$

5°) Tracer le lieu de transfert de $Y(P)/X(P)$. Que peut-on dire de la phase de $Y(P)/X(P)$

Réalisé : Kherfane Hamid

Solution :

Egalité des débits entrant et sortant



S : Section droite

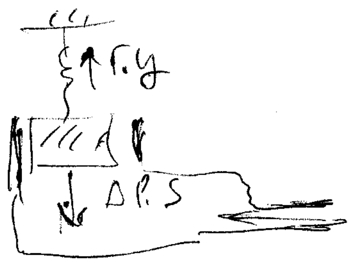
$D = \frac{\text{Volume}}{t} = \frac{S.dx}{dt} = S.\frac{dx}{dt} = S.v$

débit ; Section ; vitesse

Equation de Continuité

$$\boxed{\Sigma Q = 0}$$

(1) $$\boxed{S\frac{dy(t)}{dt} = S\frac{dx(t)}{dt} + K.\Delta p \quad , \quad \Delta p = P - P_0}$$



(2) $$\boxed{r.y = -\Delta P.S}$$

force de rappel ressort

force due à la différence de pression entre P_0 atmosphérique et la pression interne du liquide

(2) $\rightarrow \Delta P = -\frac{r.y}{S}$ dans (1) $\Rightarrow$

$S\frac{dy}{dt} = S\frac{dx}{dt} - \frac{K.r}{S}.y$

$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} + \frac{Kr}{S^2}y(t) = \frac{dx(t)}{dt}}$$

Théorème de pascal

Un liquide en équilibre transmet intégralement et en tous les points toute variation de pression produite en un point quelconque de ce liquide

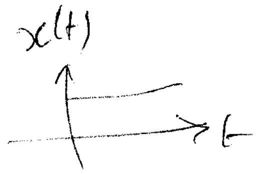
Application presse Hydraulique

1°) La fonction de Transfert est :

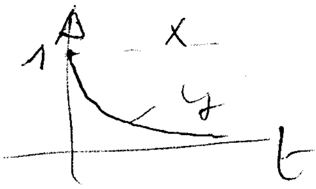
$p.Y(p) + \frac{K.r}{S^2}Y(p) = p.X(p) \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{p}{p + \frac{K.r}{S^2}}}$$

2°) Réponse à un échelon de position $X(p) = \frac{1}{p}$

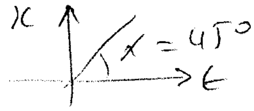


$Y(p) = \frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p + \frac{Kr}{S^2}} \rightarrow \boxed{y(t) = e^{-\frac{Kr}{S^2}t}}$



Interprétation physique : quand on déplace le piston de droite x'' celui de gauche se déplace immédiatement de la même quantité, aucune huile n'ayant eu le temps de fuir dans le tube capillaire. Puis le piston de droite restant immobile, le piston de gauche refoule l'huile à travers le passage capillaire, jusqu'à celui de gauche revienne à la position d'équilibre.

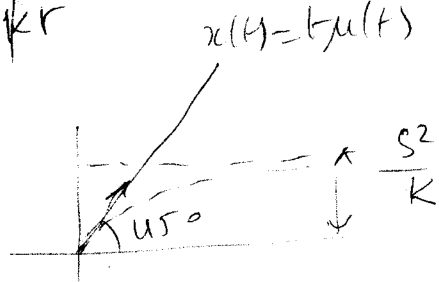
3°) Réponse à $x(t) = t\,u(t)$



$$y(p) = \frac{1}{p^2}\cdot\frac{p}{p+\frac{Kr}{S^2}} = \frac{1}{p\left(p+\frac{Kr}{S^2}\right)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+\frac{Kr}{S^2}}$$

$$A = p\cdot y(p)\Big|_{p\to 0} = \frac{S^2}{K.r}$$

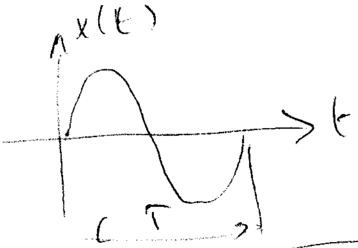
$$B = \left(p+\frac{K.r}{S^2}\right)y(p)\Big|_{p\to -\frac{Kr}{S^2}} = -\frac{S^2}{Kr} = 1$$



$$y(p) = \frac{S^2}{Kr}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{Kr}{S^2}}\right)$$

$$\boxed{y(t) = \frac{S^2}{Kr}\left(1 - e^{-\frac{Kr}{S^2}t}\right)}$$

4°) $x(t) = \sin \omega t$, $\omega = \frac{K.r}{S^2}$ est donné



$$\omega = \frac{Kr}{S^2},\quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi S^2}{Kr}$$

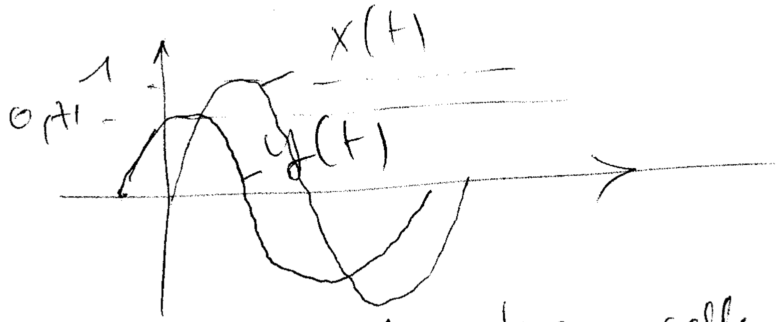
$$\boxed{T(j\omega) = \frac{j\omega}{\frac{Kr}{S^2}+j\omega}} \to |T| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\left(\frac{Kr}{S^2}\right)^2}}$$

$$|T|_{\omega=\frac{Kr}{S^2}} = \frac{Kr/S^2}{\sqrt{\left(\frac{Kr}{S^2}\right)^2+\left(\frac{Kr}{S^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1{,}4} = 0{,}71$$

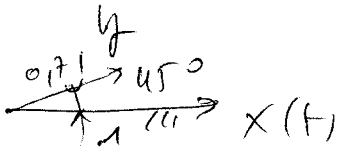
$$\boxed{\arg T = 90 - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{Kr/S^2}} ;\ (\arg T)_{\omega=\frac{Kr}{S^2}} = 90-45 = 45° = \frac{\pi}{4}\ \text{rd}$$

$$y(t) = X_0 \cdot |H(j\omega)| \sin(\omega t + \arg H(j\omega))$$

$$\boxed{y = 1 \cdot 0{,}71 \sin\left(\frac{Kr}{s^2} \cdot t + \pi/4\right).}$$



représentation temporelle



représentation de fresnell

la sortie est en avance de phase par rapport à l'entrée

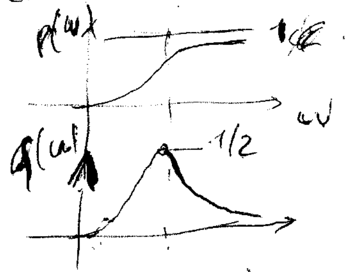
5) Diagramme de Nyquist $\left(a = \frac{Kr}{s^2}\right)$

$$T(p) = \frac{p}{p+a} \xrightarrow{p \to j\omega} T(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + a}$$

$$T(j\omega) = \frac{j\omega(a - j\omega)}{(a + j\omega)(a - j\omega)} = \frac{\omega^2 + ja\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{\omega^2}{a^2 + \omega^2} + j\frac{a\omega}{a^2 + \omega^2} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

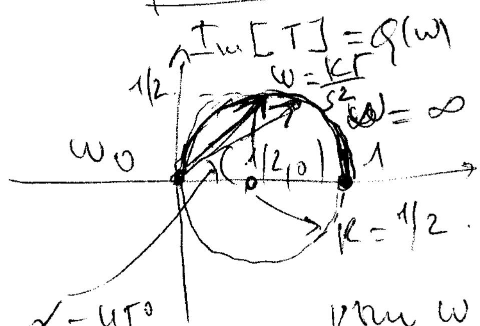
$$P^2(\omega) + Q(\omega)^2 = \frac{\omega^4}{(a^2 + \omega^2)^2} + \frac{a^2\omega^2}{(a^2 + \omega^2)^2} = \frac{\omega^2\cancel{(\omega^2 + a^2)}}{(a^2 + \omega^2)^{\cancel{2}}} = P(\omega)$$

$$\boxed{P^2(\omega) + Q(\omega)^2 = P(\omega)}$$ Equation d'un cercle



$$P^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} P + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + Q^2 = 0$$

$$\boxed{\left(P(\omega) - \frac{1}{2}\right)^2 + Q^2(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$



$$P(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + a^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{a \cdot \omega}{a^2 + \omega^2}$$

$\omega > 0$ fréquences réelles > 0

$P(\omega) > 0$

$\omega > 0 \Rightarrow$

$Q(\omega) > 0$

pour $\omega = a = \frac{Kr}{s^2} \rightarrow \begin{cases} P(\omega) = \frac{a^2}{a^2 + a^2} = 1/2 \\ Q(\omega) = \frac{a \cdot a}{a^2 + a^2} = 1/2 \end{cases}$