ELEMENTS DE LOGIQUE MATHEMATIQUE

Généralités

La logique mathématique est le domaine qui a pour objet l’étude des théories mathématiques (théorie des ensembles, théorie des nombres….) et leur cohérence (non-contradiction).

Pour étudier une théorie mathématique on utilise des **définitions**, des **axiomes**, des **propositions**, des **théorèmes**, des **corollaires**, des **lemmes** et des **conjectures**:

- Une **définition** est un énoncé qui désigne un objet mathématique ( un angle, un cercle , une fonction…).

- Un **axiome** est une affirmation que l’on admet sans démonstration(les axiomes de la géométrie d’Euclide, les axiomes de la théorie des nombres ...)

- une **proposition** est un énoncé qui est **vrai**(**V**) ou **faux**(**F**) et jamais les deux è la foix. Une proposition est souvent notée par les majuscules P,Q,R … les majuscules **V** pour vrai et **F** pour faux sont **appelés** valeurs logiques d’une proposition, on note parfois 1 pour vrai et 0 pour faux.

- un **théorème** est une proposition qu’on a démontrée vrai (théorème de Thales, théorème des valeurs intermédiaires …).

- Un **corollaire** est un résultat qui découle d’un théorème.

- Un **lemme** est un théorème qui sert à en démontrer un autre plus important.

- Une **conjecture** est une proposition qu’on suppose vraie sans parvenir à la démontrer

Connecteurs logiques

A partir de propositions élémentaires on peut en construire d’autres à l’aide de connecteurs logiques qui sont la **négation**(non **ך** )**,** la **conjonction**(et ᴧ)**,** la **disjonction(**ouv)**,** l’**implication**(⇒)et l’**équivalence( ).**

Pour établir les valeurs de vérité de chacune de ces propositions on utilise ce qu’on appelle des tables de vérité.

P et Q étant deux propositions :

* La **négation** de P notée **ך**p est une proposition qui est vraie quand P est fausse et fausse quand P est vraie sa table de vérité est :

|  |  |
| --- | --- |
| P | nonP |
| v | F |
| F | V |

* La **conjonction** des propositions P et Q notée (P et Q) ou (P ᴧ Q) est une proposition qui est vraie quand P et Q sont vraie simultanément et fausse dans les autres cas, sa table de vérité est :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P ᴧ Q |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

* La **disjonction** des propositions P et Q notée (P ou Q) ou (P v Q) est une proposition qui est fausse quand P et Q sont fausses simultanément et vraie dans les autres cas, sa table de vérité est :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P v Q |
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

* L’**implication** de la proposition Q par la proposition P notée (P⇒Q) est une proposition qui est fausse quand P est vraie et Q est fausse et vraie dans les autres cas, sa table de vérité est :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P⇒Q |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | v |

* L’**équivalence des proposition** P et Q notée (PQ) est une proposition qui est vraie quand P et Q sont vraies ou fausses .simultanément et fausse dans les autres cas, sa table de vérité est :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P Q |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | v |

EXERCICES

Soient P, Q et R 3 propositions, démontrer en utilisant les tables de vérité que :

1. Non(nonP) P
2. Non(PvQ) nonP ᴧ nonQ et non(P ᴧQ)nonP v nonQ (loi de De Morgan).
3. (P⇒Q) (nonQ⇒nonP).
4. (P⇒Q) (nonP v Q).
5. ((P v Q) ᴧ R) (P ᴧ R) v (P ᴧ R) et ((P ᴧ Q) v R) (P v R) ᴧ (P V R).
6. ((P⇒Q) ᴧ (Q⇒R)) ⇒ (P⇒R).
7. ((P⇒Q) ᴧ (Q⇒P)) (PQ).

Quantificateurs

Soit un ensemble et un élément de et une proposition dont la valeur de vérité dépend de la variable , on dit que est une proposition quantifié.

* Si pour tout la proposition est vraie on écrit , le symbole est appelé quantificateur universel.
* S’il existe au moins un élément de tel que soit vraie on écrit , le symbole est appelé quantificateur existentiel, dans le cas où est unique, on écrit

Négation des proposition quantifiées

Quelques types de raisonnements mathématiques

Soient P, Q, R trois propositions

1. Raisonnement déductif :

Si P est vraie et (P⇒Q) est vraie alors Q est vraie.

1. Raisonnement par contraposition :

(P⇒Q) (nonQ⇒ nonP)

1. Raisonnement par l’absurde :

Si (nonP⇒Q) est vraie avec Q fausse, alors P est vraie.

1. Raisonnement par récurrence

Soit P(n) une proposition quantifiée avec n un entier naturel, pour démontrer que P(n) est vraie pour tout n

* On vérifie que P(0) est vraie
* On suppose que P(n) est vraie et on démontre que P(n+1) est vraie.
* On déduit que P(n) est vraie.