ELEMENTS DE LOGIQUE MATHEMATIQUE

Généralités

La logique mathématique est le domaine qui a pour objet l’étude des théories mathématiques (théorie des ensembles, théorie des nombres….) et leur cohérence (non-contradiction).

Pour étudier une théorie mathématique on utilise des **définitions**, des **axiomes**, des **propositions**, des **théorèmes**, des **corollaires**, des **lemmes** et des **conjectures**:

- Une **définition** est un énoncé qui désigne un objet mathématique ( un angle, un cercle , une fonction…).

- Un **axiome** est une affirmation que l’on admet sans démonstration(les axiomes de la géométrie d’Euclide, les axiomes de la théorie des nombres ...)

- une **proposition** est un énoncé qui est **vrai**(**V**) ou **faux**(**F**) et jamais les deux è la foix. Une proposition est souvent notée par les majuscules P,Q,R … les majuscules **V** pour vrai et **F** pour faux sont **appelés** valeurs logiques d’une proposition, on note parfois 1 pour vrai et 0 pour faux.

- un **théorème** est une proposition qu’on a démontrée vrai (théorème de Thales, théorème des valeurs intermédiaires …).

- Un **corollaire** est un résultat qui découle d’un théorème.

- Un **lemme** est un théorème qui sert à en démontrer un autre plus important.

- Une **conjecture** est une proposition qu’on suppose vraie sans parvenir à la démontrer

Connecteurs logiques

A partir de propositions élémentaires on peut en construire d’autres à l’aide de connecteurs logiques qui sont la **négation**(non **ך** )**,** la **conjonction**(et ᴧ)**,** la **disjonction(**ouv)**,** l’**implication**(⇒)et l’**équivalence(**$⇔$ **).**

Pour établir les valeurs de vérité de chacune de ces propositions on utilise ce qu’on appelle des tables de vérité.

P et Q étant deux propositions :

* La **négation** de P notée **ך**p est une proposition qui est vraie quand P est fausse et fausse quand P est vraie sa table de vérité est :

|  |  |
| --- | --- |
| P | nonP |
| v | F |
|  F | V |

* La **conjonction** des propositions P et Q notée (P et Q) ou (P ᴧ Q) est une proposition qui est vraie quand P et Q sont vraie simultanément et fausse dans les autres cas, sa table de vérité est :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P ᴧ Q |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

* La **disjonction** des propositions P et Q notée (P ou Q) ou (P v Q) est une proposition qui est fausse quand P et Q sont fausses simultanément et vraie dans les autres cas, sa table de vérité est :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P v Q |
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

* L’**implication** de la proposition Q par la proposition P notée (P⇒Q) est une proposition qui est fausse quand P est vraie et Q est fausse et vraie dans les autres cas, sa table de vérité est :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P⇒Q |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | v |

* L’**équivalence des proposition** P et Q notée (P$⇔$Q) est une proposition qui est vraie quand P et Q sont vraies ou fausses .simultanément et fausse$⇔$ dans les autres cas, sa table$⇔$ de vérité est :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P $⇔$ Q |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | v |

EXERCICES

Soient P, Q et R 3 propositions, démontrer en utilisant les tables de vérité que :

1. Non(nonP)$ ⇔$ P
2. Non(PvQ)$ ⇔$ nonP ᴧ nonQ et non(P ᴧQ)$ ⇔$nonP v nonQ (loi de De Morgan).
3. (P⇒Q)$ ⇔$ (nonQ⇒nonP).
4. (P⇒Q)$ ⇔$ (nonP v Q).
5. ((P v Q) ᴧ R)$ ⇔$ (P ᴧ R) v (P ᴧ R) et ((P ᴧ Q) v R) $⇔$ (P v R) ᴧ (P V R).
6. ((P⇒Q) ᴧ (Q⇒R)) ⇒ (P⇒R).
7. ((P⇒Q) ᴧ (Q⇒P)) $⇔$ (P$⇔$Q).

Quantificateurs

Soit $E$ un ensemble et $x$ un élément de $E$ et $P(x)$ une proposition dont la valeur de vérité dépend de la variable $x$, on dit que $P(x)$ est une proposition quantifié.

* Si pour tout $x$ la proposition $P(x)$ est vraie on écrit $ ∀ x P(x)$, le symbole $∀$ est appelé quantificateur universel.
* S’il existe au moins un élément $x$ de $E$ tel que $P(x)$ soit vraie on écrit $∃x P(x)$, le symbole $∃$ est appelé quantificateur existentiel, dans le cas où $x$ est unique, on écrit $∃!$

Négation des proposition quantifiées

 $ non\left(∀x\in E,P\left(x\right)\right)⇔(∃x\in E, nonP\left(x\right))$

$$non\left(∃x\in E,P\left(x\right)\right)⇔(∀x\in E, nonP\left(x\right))$$

 Quelques types de raisonnements mathématiques

Soient P, Q, R trois propositions

1. Raisonnement déductif :

Si P est vraie et (P⇒Q) est vraie alors Q est vraie.

1. Raisonnement par contraposition :

(P⇒Q)$ ⇔$ (nonQ⇒ nonP)

1. Raisonnement par l’absurde :

Si (nonP⇒Q) est vraie avec Q fausse, alors P est vraie.

1. Raisonnement par récurrence

Soit P(n) une proposition quantifiée avec n un entier naturel, pour démontrer que P(n) est vraie pour tout n

* On vérifie que P(0) est vraie
* On suppose que P(n) est vraie et on démontre que P(n+1) est vraie.
* On déduit que P(n) est vraie.