

CHAPITRE 1

INTRODUCTION À L'OPTIMISATION

Sommaire

1	Problème d'optimisation	1
2	Terminologie	2
3	Classification de problème d'optimisation	4
3.1	Optimisation Continue, Optimisation Discrète et Combinatoire	4
3.2	Optimisation avec et sans contraintes	5
3.3	Optimisation mono ou multi-objectifs	5
4	Domaines d'applications d'Optimisation Combinatoire	5

Introduction

Avant de parler d'optimisation combinatoire, il faut définir d'abord le domaine d'optimisation. Les problèmes d'optimisation cherchent le meilleur rendement possible. Selon la nature de l'espace de recherche, des contraintes et des objectifs, on définit plusieurs types d'optimisation. Ce chapitre explique les notions de bases de l'optimisation ([Blum et Roli, 2003](#)), ([Urli, 2014](#)), ([Walter, 2015](#)), ([Ouaarab, 2015](#)), ([Layeb, 2010](#)), ([Belhouli, 2014](#)), ([Solnon, 2010](#)).

1 Problème d'optimisation

L'optimisation est un nom féminin qui définit une action du verbe optimiser. C'est la démarche consistant à rendre optimal le fonctionnement d'un système : *Donner à quelque*

chose (à une machine, à une entreprise, etc.) le rendement optimal en créant les conditions les plus favorables ou en tirant le meilleur parti possible.

L'optimisation appartient au domaine de la Recherche Opérationnelle qui représente la science de prise de décision. Un problème d'optimisation en mathématique consiste à trouver la **meilleure** solution possible pour un problème donné.

Définition 1. Problème d'optimisation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif,

$X \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle.

Un *problème d'optimisation* consiste à trouver la meilleure solution $\bar{x} \in X$ appelée *solution globale*.

La meilleure solution du problème varie selon l'objectif. On parle d'une *minimisation* ou une *maximisation* de la fonction f sur l'ensemble X . On note : $\bar{x} = \min_{x \in X} f(x)$ ou $\bar{x} = \max_{x \in X} f(x)$.

2 Terminologie

Variables de décision : Le vecteur $x \in X$ est appelé *vecteur de décision*. Les éléments formants le vecteur de décision sont appelés *variables de décision*. Ce sont les variables recherchées dans le problème.

Dimension de problème : La dimension du problème est représentée par le nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$. Elle représente le nombre de variables de décision. Une solution à un problème de 3 dimensions est un vecteur de 3 éléments (3-uplet).

Espace de recherche et Solution admissible : L'ensemble X de dimension n contient les valeurs que le vecteur x peut prendre. Ces dernières sont appelées *solutions admissibles* ou *faisables* (ou encore solutions candidates). Une solution admissible est une affectation de toutes les variables de décision, qui répond aux contraintes du problème. L'ensemble X est connu sous différentes appellations : ensemble admissible, espace de solution, espace de recherche, domaine de recherche etc.

Contraintes : L'espace de recherche X est limité par quelques règles. Une contrainte est une condition que doivent respecter les vecteurs de décision du problème.

Solution optimale : C'est la meilleure solution $\bar{x} \in X$ du problème. Elle est appelée *solution globale* ou *optimale*.

Fonction objectif : la fonction f , à valeur scalaire, sert de critère pour déterminer la meilleure solution du problème. Elle est appelée *fonction d'objectif* (fonction fitness, critère, etc). Elle attribue à chaque solution $x \in X$ de l'espace de recherche, un nombre réel indiquant sa valeur (son score).

Minimisation : Une minimisation revient à trouver un élément $\bar{x}$ de X tel que : $\forall x \in X : f(\bar{x}) \leq f(x)$. On dit qu'on cherche **à minimiser** la fonction f sur l'ensemble X . Dans ce cas la fonction d'objectif f est connue comme une fonction de **coût**. Le vecteur $\bar{x}$ est une borne inférieure de l'ensemble X .

Maximisation : Une maximisation revient à trouver un élément $\bar{x}$ de X tel que : $\forall x \in X : f(\bar{x}) \geq f(x)$. On dit qu'on cherche **à maximiser** la fonction f sur l'ensemble X . Dans ce cas la fonction objectif f est connue comme une fonction d'**utilité** ou de **profit**. Le vecteur $\bar{x}$ est une borne supérieure de l'ensemble X .

Minimum et maximum stricte : On parle d'un *minimum stricte* (respectivement un maximum stricte) si : $\forall x \in X : f(\bar{x}) < f(x)$ (respectivement $f(\bar{x}) > f(x)$).

Voisinage : Une solution voisine d'une solution x est définie comme une légère modification de la solution x . Cette modification est appelée aussi *mouvement*. Le voisinage de la solution x est l'ensemble des solutions voisines de x .

Optimum global et local : Un optimum global est la valeur de la fonction objectif de la solution globale. On peut avoir plusieurs solutions globales mais un seul optimum global. Un optimum local reflète la meilleure solution dans un entourage voisin. Dans la figure 1.1, on remarque qu'il existe deux solutions différentes x_1 et x_2 qui reflètent un seul optimum global $f_1 = f_2$. La solution x_3 représente une solution locale reflétant un optimum local.

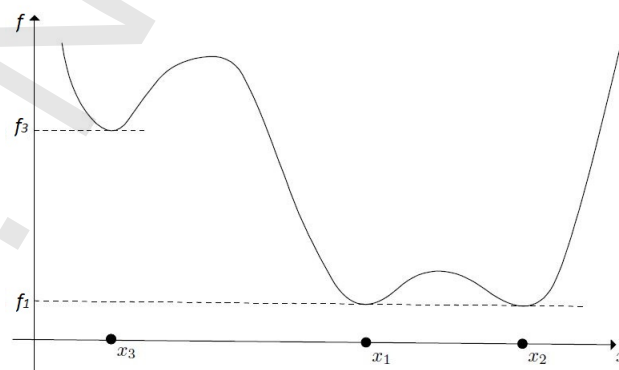


FIGURE 1.1 – Optimum local et global

3 Classification de problème d'optimisation

Il existe plusieurs famille d'optimisation. Il est important de bien identifier à quelle catégorie appartient le problème pour pouvoir choisir la conduite de la résolution. Les problèmes d'optimisation diffèrent selon l'espace de recherche, les contraintes, les objectifs, etc.

3.1 Optimisation Continue, Optimisation Discrète et Combinatoire

Selon la nature de l'ensemble de recherche X on distingue deux classes d'optimisation : l'optimisation continue et l'optimisation discrète.

Optimisation continue : On parle d'*Optimisation continue*, si l'espace de recherche X est continu (par exemple l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$). La fonction objectif est aussi continue. La fonction sphère (Figure 1.2a) est une fonction continue définie par l'équation 1.1. La minimisation de cette fonction est une optimisation continue.

$$f(x) = \sum_{i=0}^n x_i^2 \quad (1.1)$$

Optimisation discrète : On parle d'*Optimisation discrète*, si l'espace de recherche X est discret et infini. La fonction objectif qui définit un tel problème est représentée par un nuage de points (Figure 1.2b). Les problèmes de cette classe d'optimisation sont plus difficiles que ceux de l'optimisation continue.

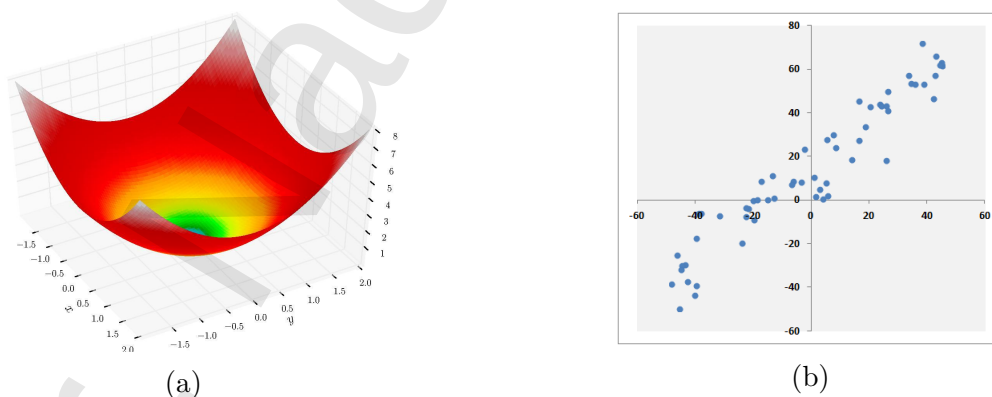


FIGURE 1.2 – Représentations de fonctions objectif : (a) Fonction continue, (b) Fonction discrète.

Optimisation combinatoire : L'*optimisation combinatoire* est une branche de l'optimisation **discrète** dont l'espace de recherche est **fini et dénombrable**.

3.2 Optimisation avec et sans contraintes

L'espace de recherche peut être limité par des contraintes. Ces dernières peuvent être des bornes inférieures ou supérieures, ou un ensemble d'équations définissant des situations précises. L'optimisation avec contraintes est plus compliquée à résoudre.

Dans le cas contraire, l'espace de recherche n'est pas limité par des contraintes. Il est alors infini et toutes les solutions incluses sont candidates. L'optimisation sans contraintes est plus facile à résoudre.

3.3 Optimisation mono ou multi-objectifs

Un problème d'optimisation peut avoir un ou plusieurs objectifs. Un problème *mono-objectif* est défini par une **unique** fonction objectif. S'il se trouve plusieurs objectifs qui génèrent une contradiction entre eux, on parle alors d'un problème *multi-objectifs*.

Pour des raisons de simplification, un problème multi-objectif peut être reformulé avec une seule fonction objectif ou en transformant des objectifs sous forme de contraintes.

4 Domaines d'applications d'Optimisation Combinatoire

L'optimisation combinatoire intervient sur toute situation nécessitant une planification ou une organisation efficace. Elle est liée à la minimisation de risque, du temps ou du coût ainsi qu'à la maximisation de la qualité, du profit ou de l'efficacité.

L'industrie et l'ingénierie sont les domaines qui profitent le plus des études de l'optimisation combinatoire. On cite quelques exemples :

- La conception de réseaux (électriques, téléphoniques ..)
- La planification des tâches des employés d'une entreprise.
- Le calcul d'itinéraire pour les applications de géolocalisation.
- La planification du trafic aérien ou routier.
- L'allocation de ressources matérielles et humaines.
- L'ordonnancement et la planification de la production.
- La gestion de portefeuilles.
- Maximisation du profit et minimisation du coût.