Equilibres bayésiens

Introduction

- Jusqu'à présent, nous avons supposé que tous les joueurs connaissent les règles du jeu auquel ils jouent.
- Les règles du jeu décrivent:
  - les joueurs,
  - l'intervention éventuelle du hasard,
  - les actions dont dispose chaque joueur à chaque période,
  - L'information de chaque joueur à chaque période et
  - les utilités des joueurs.

Information complète vs incomplète

- Les règles du jeu sont représentées par une forme extensive, qui est une connaissance commune des joueurs.
- Le jeu est à information complète lorsque tous les joueurs en connaissent les règles,
- il est à information incomplète sinon.
- L'information complète est une hypothèse forte.

Exemple

- Par exemple, il est peu probable qu'une entreprise connaisse la fonction de coût de ses concurrents.
- Le modèle qui suit permet d'analyser des situations dans lesquelles les joueurs ont une information incomplète.

4

Définition

- Dans un jeu bayésien, la nature joue en premier. Elle choisit la caractéristique ou le type de chaque joueur.
- Chaque joueur est informé de son propre type mais non des types des autres joueurs. On note ti le type du joueur i, ti ∈ Ti, où Ti est l'ensemble des types possibles.
- Les types sont tirés suivant une distribution de probabilités p(t1, t2,..., tn).
- On note Si l'ensemble des choix disponibles pour le joueur i, quel que soit son type.
- La fonction d'utilité ui du joueur i est définie sur S1x...x Sn xT1 x...x Tn

5

Exemple

- Les joueurs 1 (la femme) et 2 (le mari) peuvent aller écouter du Bach ou du Stravinsky. Ils peuvent sortir ensemble ou séparément.
- **La femme n'est pas sûre que son mari veuille sortir avec elle.**
- Le mari sait s'il préfère sortir avec sa femme ou s'il préfère l'éviter. La femme pense qu'il y a une chance sur deux que son mari préfère l'éviter.
- La croyance de la femme peut être formulé à partir de son expérience passée.
- Formellement, la femme pense qu'avec probabilité 1/2, elle joue au jeu de gauche (son mari aime sa compagnie), et avec probabilité 1/2, elle joue au jeu de droite (le mari préfère l'éviter).
- On peut dire que le mari peut être de deux types : le type Fidèle et le type Infidèle.
- La femme ne connaît pas le type du mari.

6

		proba $\frac{1}{2}$ Mari Fidèle			proba $\frac{1}{2}$ Mari Infidèle	
		B	S		B	S
Femme Fidèle	B	2;1	0;0	B	2;0	0;2
	S	0;0	1;2	S	0;1	1;0

- Donc, pour agir rationnellement, elle doit former une croyance sur les actions de chaque type.
- Etant donné ces croyances et sa croyance sur le type (i.e., la probabilité de chaque type), elle peut calculer l'utilité attendue de chacune de ses actions.
- Si par exemple elle pense que le mari fidèle choisira B et le mari infidèle S, alors elle pense que B lui rapportera 2 avec la probabilité 1/2 et 0 avec la probabilité 1/2, d'où son utilité attendue est 1/2x2+1/2x0 =1
- et S lui donnera une utilité attendue de 1/2x0+1/2x1=1/2

		proba $\frac{1}{2}$ Mari Fidèle			proba $\frac{1}{2}$ Mari Infidèle	
		B	S		B	S
Femme Fidèle	B	2;1	0;0	B	2;0	0;2
	S	0;0	1;2	S	0;1	1;0

		(B;B)	(B;S)	(S;B)	(S;S)
Femme Fidèle (Type y_1)	B	2	1	1	0
	S	0	1/2	1/2	1

Equilibre de Nash

- Un équilibre de Nash en stratégies pures est un triplet d'actions, une pour la femme et une pour chaque type du mari, tel que l'action de la femme est optimale compte tenu des actions des deux types du mari, et l'action de chaque type du mari est optimale compte tenu de l'action de la femme.
- Les deux types du mari sont analysés comme deux joueurs différents, et le jeu est analysé comme un jeu à trois joueurs dans lequel l'utilité attendue de la femme en fonction des actions des deux autres joueurs, et
- l'utilité attendue de chaque type de mari est indépendante de l'action de l'autre type, elle dépend uniquement de l'action de la femme.

Equilibre de Nash (2)

- (B,(B,S)) est un équilibre de Nash de ce jeu. Etant donné (B,S), B est une meilleure réponse. Etant donné que la femme joue B, B est une meilleure réponse du type fidèle et S, une meilleure réponse du type infidèle.

		proba $\frac{1}{2}$ Mari Fidèle			proba $\frac{1}{2}$ Mari Infidèle	
		B	S		B	S
Femme Fidèle	B	2;1	0;0	B	2;0	0;2
	S	0;0	1;2	S	0;1	1;0

10

Extension

- Considérons à présent le cas où la femme peut également être infidèle.
- Supposons que la femme pense que le mari est fidèle avec probabilité 1/2 et infidèle avec probabilité 1/2.
- Le mari pense que la femme est fidèle avec probabilité 2/3 et infidèle avec probabilité 1/3.
- Chaque joueur connaît son type, mais non celui de l'autre.
- Il y a quatre états de la nature. Appelons ces états ff (femme fidèle, mari fidèle),
- fi (femme fidèle, mari infidèle), if (femme infidèle, mari fidèle), ii (femme infidèle, mari infidèle).
- Comme la femme ne connaît pas le type du mari, elle ne peut pas distinguer l'état ff de l'état fi, ni if de ii.
- Sa structure d'information est {{ff,fi}{if,ii}}}.
- De même, le mari ne peut pas distinguer l'état ff de l'état if, ni fi de ii.
- Sa structure d'information est {{ff,if}{fi,ii}}.

11

- On peut imaginer que chaque élément de la structure d'information d'un joueur est associé à un signal.
- La femme reçoit le signal y1 dans les états ff et fi, et un signal différent n1 dans les états if et ii.
- De même, le mari reçoit le signal y2 dans les états ff et if et un signal différent n2 dans les états if et ii.
- Après avoir reçu le signal y1, la femme est de type y1 ; et après avoir reçu le signal n1; elle est de type n1.
- De même, le mari peut être de type y2 ou n2. Le jeu bayésien est le suivant :

			Mari Fidèle	proba $\frac{1}{2}$		Mari Infidèle	proba $\frac{1}{2}$
			B	S		B	S
Femme Fidèle	proba $\frac{2}{3}$	B	2;1	0;0	B	2;0	0;2
		S	0;0	1;2	S	0;1	1;0
			B	S		B	S
Femme Infidèle	proba $\frac{1}{3}$	B	0;1	2;0	B	0;0	2;2
		S	1;0	0;2	S	1;1	0;0

12

Å Considérons une femme de type y1. Sa croyance sur les états ff et fi est (1/2 ;1/2).

Å Ses utilités attendues pour les quatre paires d'actions du mari sont données par le tableau:

		$(B;B)$	$(B;S)$	$(S;B)$	$(S;S)$
$Femme\ fidèle\ (Type\ y_1)$	B	2	1	1	0
	S	0	1/2	1/2	1

13

Å De même, les utilités attendues d'une femme de type n1 sont données par :

		$(B;B)$	$(B;S)$	$(S;B)$	$(S;S)$
$Femme\ Infidèle\ (Type\ n_1)$	B	0	1	1	2
	S	1	1/2	1/2	0

Å Les utilités attendues d'un mari de type y2 sont données par :

		$(B;B)$	$(B;S)$	$(S;B)$	$(S;S)$
$Mari\ fidèle\ (Type\ y_2)$	B	1	2/3	1/3	0
	S	0	2/3	4/3	2

Å et celles d'un mari de type n2

		$(B;B)$	$(B;S)$	$(S;B)$	$(S;S)$
$Mari\ Infidèle\ (Type\ n_2)$	B	0	1/3	2/3	1
	S	2	4/3	2/3	0

14

Å Pour déterminer les équilibres bayésiens, nous pouvons établir les tableaux de meilleures réponses des deux joueurs.

	Mari			
	(B,B)	(B,S)	(S,B)	(S,S)
$Meilleure\ réponse\ de\ la\ Femme$	(B,S)	(B,B)	(B,B)	(S,B)

	Femme			
	(B,B)	(B,S)	(S,B)	(S,S)
$Meilleure\ réponse\ du\ Mari$	(B,S)	(B,S) ou (S,S)	(S,B) ou (S,S)	(S,B)

Å ((B;B); (B; S)) et ((S;B); (S; S)) sont des équilibres bayésiens.

15

Équilibres bayésiens

- ((B;B); (B; S)) et ((S;B); (S; S)) sont des équilibres bayésiens.
- En effet, pour la femme (B;B) est une meilleure réponse à (B; S) et
- pour le mari (B; S) est une meilleure réponse à (B;B).
- De même, pour la femme (S;B) est une meilleure réponse à (S; S) et
- Pour le mari, (S; S) est une meilleure réponse à (S;B).

16