THEORIE DES JEUX DE COALITION

Les jeux de coalition (JC) sont des jeux coopératifs. Ils ne modélisent pas les actions individuelles des joueurs mais plutôt ils s'occupent de groupes de joueurs agissant ensembles.

Dans les JC on ne s'intéresse pas :

1) à comment les joueurs forment les coalitions,

2) à ce que fait chaque agent dans une coalition.

On suppose que tout cela est déjà fourni.

Nous nous intéressons au gain apporté par une coalition et comment ce gain va être réparti entre les membres d'une part et aussi comment garantir la stabilité d'une coalition.

Définition 1: L'hypothèse de l'utilité transférable:

1) les gains peuvent être distribués entre les membres de la coalition,

2) à chaque coalition est assignée une valeur unique appelé *payoff* ou gain.

Un jeu de coalition avec une ***utilité transférable*** est la paire (N,v) où:

- N est un ensemble fini de joueur indexés par i et
- $v: 2^N \mapsto \mathbb{R}$ associe à chaque coalition S inclue dans N une valeur réelle appelée payoff que les membres de la coalition peuvent distribuer entre eux.
- $v(\emptyset) = 0$

Les question que l'on se pose dans les JC sont:

- quelle coalition former? et

- comment le payoff d'une coalition va être distribué entre ces membres.

JEUX SUPPER ADDITIFS

Un jeu $G(N, v)$ est **super additif** si pour tout S, T inclus dans N , si $S \cap T = \phi$, alors $v(S \cup T) >= v(S)+v(T)$: la valeur d'une coalition est au moins aussi payante que la somme des valeurs de chacun de ses individus.

Ce qui implique que la grande coalition a le plus grand payoff. Ceci répond à la première question: la grande coalition est la plus désirée. (l'union fait la force)

Comment va être réparti le payoff d'une coalition entre ses membres? 2 possibiltés peuvent être envisagées:

-assurer l'**équité**, Fairness,

- assurer la **stabilité** de manière à ce qu'un membre puisse rester dans la coalition et non pas aller former une autre plus petite.

LA VALEUR DE SHAPLEY:

Quelle est la manière équitable de diviser le payoff d'une coalition entre ces membres? ceci dépend de la définition de l'équité. Une approche adoptée est de définir des axiomes qui expriment les propriétés d'une division équitable.

l'idée de shapley : les membres d'une coalition recevront les payoffs proportionnels à leur contributions marginales dans la coalition.

Ainsi il va falloir trouver un système de pondération permettant de mesurer la **contribution marginale** d'un membre de la coalition. les axiomes de shapley nous fournissent une réponse;

LES AXIOMES DE SHAPLEY:

Symétrie: i et j sont *interchangeable* relativement à v, s'ils contribuent toujours avec le même montant pour chaque coalition.

Formellement: pour chaque S ne contenant ni i ni j $v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$

$\forall v$, si i et j sont interchangeables alors $\varphi_i(N, v) = \varphi_j(N, v)$ Les joueurs interchangeables reçoivent les mêmes paiements.

Le Joueur Dummy: la contribution du joueur Dummy est toujours =0

$$\forall S \; v(S \cup \{i\}) = v(S)$$

$$\forall v \text{ si } i \text{ est un joueur dummy alors } \varphi_i(N, v) = 0$$

Additivité: si l'on peut séparer le jeu en deux parties v=v1+v2 alors on peut décomposer le paiement

Axiome3: pour 2 valeurs de paiement v1 et v2 $\varphi_i(N, v1 + v2) = \varphi_i(N, v1) + \varphi_i(N, v2)$ pour chaque i où le jeu
$(N, v1 + v2)$ est défini par $(v1 + v2)(S) = v1(S) + v2(S)$ pour chaque coalition S.

LA VALEUR DE SHAPLEY:

étant donné un jeu de coalition
(N, v) la valeur de Shapley du joueur i est donnée par :

$$\varphi_i(N, v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} |S|!\,(|N| - |S| - 1)!\,\big(v(S\cup\{i\}) - v(S)\big)$$

Théorème: étant donné une jeu de coalition [illegible], [illegible]

[illegible]

[illegible]

La Valeur de Shapley capture la contribution marginale $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ du joueur i à travers toutes les coalitions possibles S $|S|!(|N| - |S| - 1)!$ par rapport à la grande coalition $\frac{1}{N!}$.

1) pour chaque séquence S regarder la contribution marginale de i quand il est ajouté à la séquence S: $v(S \cup \{i\}) - v(S)$

2) Pondérer la contribution marginale par $|S|!$ façons l'ensemble S peut être formé avant l'addition de i et avec $(|N| - |S| - 1)!$ façons le reste des joueurs sans i

3) on somme le tout avec tous les S possibles et on divise par $|N|!$: le nombre de permutations possibles de tous les joueurs.

Exemple: de calcul de poids:

soit un jeu de coalition G=(N,v) où N={1,2,3}

le calcul des poids pour le joueur 1 se fait comme suit,

1	12	123	v(1)
1	13	123	v(1)
2	23	123	v(123)-v(23)
2	21	123	v(21)- v(2)
3	31	123	v(31)- v(3)
3	32	123	v(123)-v(32)

le paiement du joueur 1 est $\phi_1 = \frac{1}{3!}(2 * v(1) + 2(v(123) - v(23)) + v(21) - v(2) + v(31) - v(3))$

$= \frac{1}{3}v(1) + \frac{1}{3}(v(123) - v(23)) + \frac{1}{6}(v(21) - v(2)) + \frac{1}{6}(v(31) - v(3))$

Discussion: la valeur de shapley est toujours calculable et est unique. seulement, le paiement resultant n'est pas toujours stable: les joueurs peuvent être amenés à quitter la grande coalition pour former une plus petite et recevoir un plus grand gain.

Un autre problème majeur est sa complexité de calcul car on doit calculer $2^{|N|}$ ordres possibles qui est calculable que pour les petits ensembles de joueurs. De plus, elle nécessite la connaissance de la valeur v de chaque singleton.

Le CORE

La valeur de Shapley assure l'équité (Fairness) dans le partage du paiement de la grande coalition entre ses membres mais ignore la stabilité. Les questions que l'on se posent sont:

- qu'est ce qui garantit que les joueurs vont former la grande coalition étant donnée un partage de paiement donné?

- n'existe t -il pas des joueurs qui préfèrent une plus petite coalition?

En effet, il se pourrait que de plus petites coalitions sont plus attractives (*incentive* en anglais) pour des sous ensembles de joueurs.

Exemple: Jeu du vote majoritaire (tiré de livre MULTIAGENT SYSTEMS Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations. Yoav Shoham & Kevin Leyton-Brown)

> *Un parlement formé de 4 parties politiques A, B, C et D qui ont respectivement 45, 25, 15 et 15 représentants doivent voter pour faire passer une facture de 100 M $. Un vote majoritaire (minimum 51 voies) est nécessaire pour faire passer la loi. si la facture ne passe pas alors chacun des parties aura 0$.*

En utilisant la valeur de Shapley, le paiement de chaque partie sera (50, 16.67, 16.67, 16.67). Cependant la coalition {AB} a la majorité et peut se passer de C et D le paiement pour la coalition {A,B} est (75,25).

Pour que les joueurs forment ***la grande coalition*** il faut que le profil de paiement soit dans le CORE.

Définition du CORE:
un vecteur de paiement u est dans le CORE si:
1. $\forall_{S \subset N}, \sum_{i \in S} u_i \geq v(S)$,

2. et u est faisable.

La première condition de la définition d'un core nous apprend que les paiements que les joueurs vont recevoir dans le paiement u est plus grand que les paiements de n'importe quelle coalition pour les joueurs dans la coalition; en d'autres termes, il n'existe pas de coalition S dont la valeur v(S) est plus grande que la somme des paiements qu'auront les joueurs dans S.

La condition 2 vérifie que le paiement total de u n'est pas plus grand que la valeur de la coalition.

EXISTENCE ET UNICITE

Est-ce que le *core* n'est jamais vide? NON

si on reprend le jeu de vote, l'ensemble minimal de coalitions pour avoir la majorité (51) est {A,B},{A,C}, {A,D} et {B,C,D}. Si la somme des paiements des parties B, C et D est inférieur à 100M$, alors cet ensemble de joueurs seront motivés de dévier (ne pas faire de coalition ensemble). si B, C et D ont le paiement entier de 100M$ alors A reçoit 0 et sera tenter par former une coalition avec B ou C ou D. Donc on constate aucune forme de stabilité et donc le core est vide.

Est-ce que le core est unique? NON

si l'on reprend le cas du vote majoritaire où la majorité doit être au minimum = 80% les coalitions minimales {A,B,C} et {A,B,D}; n'importe quelle distribution complète des 100M$ entre les parties A et B appartient au core puisque A et B sont nécessaires dans n'importe quelle coalition gagnante puisque A et B sont indispensables . Ainsi les paiements (50,50,0,0) (60,40,0,0)...... appartiennent au core et donc pas d'unicité. Remarque le paiement (50,30,10,10) n'est pas dans le core puisque la condition 1 n'est pas vérifiée:

$x_A + x_B + x_C = 90 < v(\{A, B, C\}) = 100$ ce qui ne vérifie pas la condition 1 de la définition d'un core.

DEFINITIONS

1.simple Game:

$G = (N, v)$ est un jeu simple si $\forall S \subset N, v(S) \in \{0,1\}$

2.Veto player:

Un joueur i est un joueur Veto si $v(N - \{i\}) = 0$

3.Théoreme 1 :

Dans un jeu simple le core est vide si et seulement si il n'y a pas de joueur veto.

s'il y a des joueurs veto le core consiste aux vecteurs de paiement dans lesquels tous les joueurs non veto ont un paiement de 0.

4. Convex game:

un jeu $G = (N, v)$ est convexe si $\forall S, T \subset N, v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) - v(S \cap T)$.

La convexité est plus forte que la *supper additivité*.

5. Théorème 2: chaque jeu convexe a un core non vide

6. Théorème 3 : dans chaque jeu convexe la valeur de Shapley est dans le core.

exemple: tiré de Multi-agent systems (vidal)

S	$v(S)$
{1}	1
{2}	2
{3}	2
{12}	4
{13}	3
{23}	4
{123}	6

pour trouver le CORE il faut chercher la distribution (x1,x2,x3) des paiements qui vérifient:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_3 \geq 3 \\ x_2 + x_3 \geq 4 \end{cases}$$

parmi les paiements suivants quels sont ceux qui se trouvent dans le CORE

(2,2,2); (2,3,3), (2,1,2); (2,2,1); (1,2,2)