REPRESENTATIONS D'UN SYSTEME ET TRANSFORMATIONS

Il existe plusieurs représentations d'état dites réalisations du système. Dans cette partie, il est montré comment passer de la fonction de transfert à plusieurs formes de réalisations.

- **Cas d'une fonction de transfert strictement propre (m < n)**

<u>Réalisation diagonale ou quasi diagonale de Jordan</u>

On suppose que $a_n = 1$ de sorte que la fonction de transfert G(p) peut s''écrire :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{\prod_{i=1}^{n}(p - \lambda_i)}.$$

L'expression ci-dessus fait apparaitre les pôles du système, c'est à dire les racines du dénominateur D(p).

- **Pôles distincts**

Dans le cas où tous les pôles λ_i, i = 1, ..., n sont distincts, il est facile de réaliser la décomposition en éléments simples de Y (p) = G(p)U(p) et il vient :

$$Y(p) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\alpha_i}{p - \lambda_i} U(p) \right)}_{X_i(p)}.$$

Si l'on focalise son intention sur chaque terme $X_i(p)$, l'on déduit que

$$pX_i(p) = \alpha_i U(p) + \lambda_i X_i(p),$$

Ce qui se traduit dans le domaine temporel, par application de $\mathcal{L}^{-1}$, par

$$\dot{x}_i = \alpha_i u + \lambda_i x_i.$$

En choisissant le vecteur d'état $x = [x_1 \ldots x_n]'$, il vient aisément la réalisation suivante, dite diagonale :

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} x,
\end{cases}
$$

Une réalisation de cette forme est dite diagonale car la matrice d'´évolution A est diagonale. Laquelle peut également être modifiée en remplaçant B par C′ et C par B′. De manière plus générale, dans une réalisation diagonale, B = $[\beta_1 \dots \beta_n]'$ et C = $[\gamma_1 \dots \gamma_n]$ doivent être telles que $\beta_i\gamma_i = \alpha_i$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

Exemple :

$$
G(p) = \frac{1}{p(p+1)(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p-1)}
$$

peut conduire à la réalisation.

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x.
\end{cases}
$$

- **Pôles multiples**

Dans le cas où G(p) possède un pôle d'ordre de multiplicité supérieur à 1, la diagonalisation de A n'est pas forcement possible. Pour comprendre ce qui peut être envisagé dans cette situation, l'on peut tout simplement considérer une fonction de transfert G(p) ne possédant qu'un seul pôle λ de multiplicité n. On a alors :

$$
Y(p) = G(p)U(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\frac{U(p)}{(p-\lambda)^i}}_{X_{n+1-i}(p)}.
$$

On voit bien sur cette expression que le premier terme est tel que :

$$
X_n(p) = \frac{U(p)}{p-\lambda} \overset{\mathscr{L}^{-1}}{\rightarrow} \dot{x}_n = \lambda x_n + u.
$$

Quant aux autres termes, ils sont tels que

$$
X_{j-1}(p) = \frac{U(p)}{(p-\lambda)^j} = \frac{X_j(p)}{p-\lambda} \overset{\mathscr{L}^{-1}}{\rightarrow} \dot{x}_{j-1} = \lambda x_{j-1} + x_j, \forall j \in \{2, ..., n\}.
$$

Ceci conduit à la réalisation suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix} x \qquad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y & = & [\ \alpha_n \quad \alpha_{n-1} \quad \alpha_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_2 \quad \alpha_1\ ]\, x. \end{array}\right.$$

Dans la réalisation ci-dessus, on constate que la matrice d'évolution A est quasi diagonale c.-à-d. constitue un bloc de Jordan.

Pour le cas où G(p) contient des pôles d'ordre de multiplicité divers, il suffit d'associer les deux cas répertoriés précédemment comme le montre l'exemple ci-après :

$$G(p) = \frac{2p^2+4p+1}{p(p+1)^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Il apparait un pôle simple nul et un pôle double de Jordan égal à -1. Ceci conduit à la réalisation suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \\ y & = & [\ 1 \quad 1 \quad 1\ ]\, x \end{array}\right.$$

<u>Remarque</u>

Il est clair que ces formes de Jordan font apparaitre les pôles de G(p) *sur la diagonale de* A*. Ainsi, ces pôles sont aussi les valeurs propres de* A*. Lorsque les pôles sont multiples, la matrice peut ne peut être diagonale, mais ce n'est pas systématique. En effet, il est possible qu'une matrice carrée ayant des valeurs propres multiples puissent ˆêtre diagonalisée (voir cours de mathématiques).*

Réalisation de forme compagne

Il existe plusieurs réalisations de forme compagne qui peuvent être facilement obtenues à partir de la fonction de transfert. Ce paragraphe est restreint aux formes compagnes les plus classiques. Pour ce faire, G(p) est supposé de la forme suivante avec $a_n = 1$:

$$\boxed{\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}.}$$

Les deux **formes dites ≪ compagnes≫** les plus communément rencontrées sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y & = & \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x. \end{array}\right.$$

Forme compagne verticale :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ -a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u \\ \\ y & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} x. \end{array}\right.$$

Aucune justification rigoureuse n'est apportée ici mais l'on peut comprendre que ces formes compagnes sont liées aux formes issues de l'´équation différentielle. Reprenant le dernier exemple de fonction de transfert, il vient :

$$G(p) = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p(p+1)^2} = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p^3 + 2p^2 + p},$$

qui peut correspondre à la forme compagne horizontale suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y & = & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} x. \end{array}\right.$$

Cas d'une fonction de transfert non strictement propre (m = n)

Dans le cas où m = n, on peut se ramener au cas d'une fonction de transfert strictement propre en opérant une division polynomiale de la façon suivante :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\mathrm{b}_0 + \mathrm{b}_1 p + \ldots + \mathrm{b}_n p^n}{D(p)} = \frac{R(p)}{D(p)} + Q = G_{pr}(p) + Q = \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_n p^n}{D(p)} + Q.$$

Comme m = n, le quotient Q est une constante et le reste R(p) est un polynôme de degré strictement inferieur à celui du diviseur D(p). Ainsi, $G_{pr}(p)$ est une fonction de transfert strictement propre.

Les coefficients du numérateur N(p) de la fonction de transfert globale G(p) sont notés b_i pour les distinguer des coefficients b_i du numérateur R(p) du transfert strictement propre $G_{pr}(p)$ extrait de G(p).

Par ailleurs, l'on a Y (p) = G(p)U(p) = G_{pr}U(p) + QU(p) = $Y_{pr}(p)$ + QU(p). Donc, si l'on prend y_{pr} comme sortie, la fonction de transfert associée au système obtenu est G_{pr} dont on peut d´exterminer une réalisation (A, B, C). Il vient alors :

$$\begin{cases} \dot{x} & = & Ax & + & Bu \\ y_{pr} & = & Cx. \end{cases}$$

En posant D = Q et en réalisant le changement de variable inverse (dans le domaine temporel cette fois-ci).

$$y = y_{pr} + Du$$

Il vient :

$$\begin{cases} \dot{x} & = & Ax & + & Bu \\ y & = & Cx & + & Du. \end{cases}$$

Par exemple, soit la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{p^3 + 4p^2 + 5p + 1}{p^3 + 2p^2 + p} = \frac{(p^3 + 2p^2 + p) + (2p^2 + 4p + 1)}{p^3 + 2p^2 + p} = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p^3 + 2p^2 + 1} + 1 = G_{pr}(p) + 1.$$

$G_{pr}(p)$ correspond à la fonction de transfert du dernier cas traite. Il suffit donc de conserver les matrices A, B et C données en par la représentation ci-dessous en y ajoutant la transmission directe D = 1.

$$\begin{cases} \dot{x} & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y & = & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

Transformation de la représentation d'´état à la fonction de transfert
S'il existe plusieurs manières d'obtenir une réalisation à partir de la fonction de transfert, cette dernière étant unique, il n'existe qu'une façon de l'obtenir à partir d'une équation d'état. Pour cela, il faut noter que $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire qui peut donc s'appliquer aux matrices. Partant de l'´équation suivante :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du. \end{cases}}$$

il vient,

$$\begin{cases} pX(p) = AX(p) + BU(p) \Leftrightarrow X(p) = (pI - A)^{-1}BU(p) \\ Y(p) = CX(p) + DU(p), \end{cases}$$

Les conditions initiales étant considérées nulles puisqu'il s'agit de d´exterminer (p). De toute évidence, ceci amené :

$$\boxed{G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D.}$$

Le dénominateur D(p) de la fonction de transfert est souvent appelé ***polynôme caractéristique***. Il est facile de voir qu'il est, dans l'expression ci-dessus, engendré par l'inversion matricielle et égal à :

$$\boxed{D(p) = \det(pI - A).}$$

Transformation d'une réalisation à l'autre

Il a été vu qu'une fonction de transfert pouvait correspondre à plusieurs réalisations. En réalité, elle en admet même une infinité comme le montre le paragraphe qui suit.

❖ Changement de base

On peut passer d'une réalisation à une autre tout simplement par un changement de base dans l'espace d'état R^n. En effet, si l'on considère l'équation d'état, on peut appliquer au vecteur d'état un changement de repère de sorte à obtenir un nouveau vecteur d'état ˜x. Ainsi, soit le changement de base x = M˜x où M est une matrice de rang plein, il vient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \underbrace{M^{-1}AM}_{\tilde{A}}\tilde{x} + \underbrace{M^{-1}B}_{\tilde{B}}u \\ y = \underbrace{CM}_{\tilde{C}}\tilde{x} + Du. \end{cases}$$

Le quadruplet de matrices obtenu est donc (˜A, ˜B, ˜C, ˜D) = ($M^{-1}AM, M^{-1}B, CM, D$). Comme il existe une infinité délatrices de passage utilisables, il existe aussi une infinité de réalisations équivalentes qui correspondent toutes à la même fonction de transfert. En effet,

$$\tilde{G}(p) = CM(pI - M^{-1}AM)^{-1}M^{-1}B + D = CM(M^{-1}(pI - A)M)^{-1}M^{-1}B + D = C(pI - A)^{-1}B + D = G(p).$$

En outre, puisque$M^{-1}AM$ est semblable à A, les valeurs propres de A sont les mêmes quelle que soit la réalisation considérée. De ce fait, ce sont toujours les pôles de G(p) c'est à dire les racines du polynôme caractéristique (même si l'on sera plus tard amène à porter une nuance à ce propos).
Les racines du polynôme caractéristique D(p), c'est à dire les pôles du système, sont valeurs propres de la matrice d'état A quelle que soit la réalisation choisie.
Il est possible de passer d'une réalisation à une autre ce qui peut se révéler utile quand la seconde a une forme particulière. Le principe est de d´exterminer la matrice de passage.

Transformation en forme compagne (horizontale)

Soit un quadruplet de matrices (A, B, C, D) constituant une représentation d'état d'un système. Il s'agit alors de d´exterminer M, une matrice de passage à une autre réalisation (˜A, ˜B , ˜C, ˜D) = ($M^{-1}AM, M^{-1}B, CM, D$) qui soit compagne horizontale.

⋄ O*n s'attache d'abord à exprimer les colonnes de* M *:*

On note que A˜ est de la forme (3.12) où les composantes a_i sont les coefficients du polynôme caractéristique P(λ) qui peut être calculé :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i\lambda^i).$$

Ceci permet d'obtenir A˜. Si l'on décompose la matrice M en M = [$m_1, ..., m_n$], alors l'Egalite´ AM = MA˜ conduit à écrire :

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
Am_1 & = & -a_0 m_n & \text{colonne } 1 \\
Am_2 & = & v_1 - a_1 m_n & \text{colonne } 2 \\
 & \vdots & & \vdots \\
Am_{n-1} & = & m_{n-2} - a_{n-2} m_n & \text{colonne } n-1 \\
Am_n & = & m_{n-1} - a_{n-1} m_n & \text{colonne } n.
\end{array}
\right.
$$

$$
\Rightarrow \left\{
\begin{array}{lcl}
m_{n-1} & = & (A + a_{n-1} I) m_n \\
m_{n-2} & = & (A^2 + a_{n-1} A + a_{n-2} I) m_n \\
 & \vdots & \\
m_1 & = & (A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \ldots + a_2 A + a_1 I) m_n
\end{array}
\right.
$$

◊ *On ne constate que* M *est fonction de* m_n. *Comment déterminer* m_n *?*
Compte tenu de $A_{m1} = -a_0 m_n$, il vient :

$$(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I) m_n = 0.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, toute matrice A vérifier son propre polynôme caractéristique, c.-à-d.

$$P(A) = \det(A - A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I = 0,$$

Ce qui signifie que l'égalité précédente est vérifiée quelle que soit A et quel que soit m_n.

◊ ***Procédure pratique :***
Il est donc possible de fixer arbitrairement $m_n \neq 0$ et de déterminer la matrice de changement de base M grâce à :

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
Am_1 & = & -a_0 m_n & \text{colonne } 1 \\
Am_2 & = & v_1 - a_1 m_n & \text{colonne } 2 \\
 & \vdots & & \vdots \\
Am_{n-1} & = & m_{n-2} - a_{n-2} m_n & \text{colonne } n-1 \\
Am_n & = & m_{n-1} - a_{n-1} m_n & \text{colonne } n.
\end{array}
\right.
$$

$$
\Rightarrow \left\{
\begin{array}{lcl}
m_{n-1} & = & (A + a_{n-1} I) m_n \\
m_{n-2} & = & (A^2 + a_{n-1} A + a_{n-2} I) m_n \\
 & \vdots & \\
m_1 & = & (A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \ldots + a_2 A + a_1 I) m_n
\end{array}
\right.
$$

Transformation en forme de Jordan

Le problème est le même que celui du paragraphe précédent mais la matrice M doit être telle que $\tilde{A}$ est diagonale ou de Jordan.

- ***Les valeurs propres λ_i de A sont distinctes***

Il suffit de déterminer n vecteurs non nuls linéairement indépendants v_i tels que :

$$Av_i = \lambda_i v_i.$$

Les vecteurs v_i sont appelés vecteurs propres. On a alors $M = V = [v_1, \ldots, v_n]$. La matrice $J = V^{-1}AV$ est diagonale et sa diagonale contient les valeurs propres de A.

- ***Les valeurs propres λ_i de A sont multiples***

Dans ce cas, A peut ne pas être diagonalisable mais l'on peut lui associer une matrice de Jordan. Pour simplifier, on suppose ici que A n'a qu'une valeur propre λ, d'ordre de multiplicité *n*. Il convient de d´déterminer le nombre de blocs de Jordan dans $J = V^{-1}AV$. Ce nombre est donné par :

$$q = n - \text{rang}(\lambda I - A).$$

Pour comprendre comment d´déterminer les vecteurs propres généralisés, il est plus facile d'envisager les deux cas extrêmes, q = 1 (un seul bloc de Jordan) et q = n (matrice J diagonale). Les cas intermédiaires ne correspondent qu'à une association de ces deux cas comme il est expliqué par la suite.

◊ q = 1 :

La relation :

$$AV = A[v_1, \dots, v_n] = VJ = [v_1, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Conduit aux égalités suivantes (une égalité par colonne) :

$$\begin{cases} Av_1 & = & \lambda v_1 \\ Av_2 & = & v_1 + \lambda v_2 \\ & \vdots & \\ Av_{p-1} & = & v_{p-2} + \lambda v_{p-1} \\ Av_p & = & v_{p-1} + \lambda v_p. \end{cases}$$

Il faut donc procéder à une résolution séquentielle de toutes ces équations linéaires en s'assurant toujours que les v_i sont bien linéairement indépendants.

◊ q = n :

Dans ce cas, l'on d´extermine simplement n vecteurs v_i linéairement indépendants tels que :

$$Av_i = \lambda v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

◊ q ≠ n et q ≠1 :

Dans ce cas, il y a plusieurs blocs de Jordan et il convient d'associer les deux techniques expliquées ci-avant.

Remarque

Il peut exister une ambigüité sur la taille des blocs de Jordan ; si cela se produit, l'on peut envisager tous les cas possibles sachant qu'un seul conduira à une solution. Ainsi, la première solution rencontrée est recevable.

Dans le cas où il y a plusieurs valeurs propres multiples, il faut procéder comme ci-dessus, mais ce, pour chaque valeur propre.

Exemple :

Soit la matrice d'état :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a :

$$P(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda(\lambda-1)^2$$

$\lambda_1 = 0$ est une valeur propre simple. En résolvant $Av_1 = \lambda_1 v_1$, l'on peut voir que $v_1 = [0\ 1\ -1]'$ est une solution.
$\lambda_2 = 1$ est valeur propre double. Or, $q = n - \mathrm{rang}(I - A) = 3 - 1 = 2$ donc l'on statique A est diagonalisable. En résolvant $Av = \lambda v$, On trouve :

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b$$

Où a et b sont deux degrés de liberté. En choisissant [a b] = [0 1] et [a b] = [1 0], l'on obtient les deux derniers vecteurs propres et

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Lambda = V^{-1}AV = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Remarque

Dans l'exemple ci-avant, la matrice A *est diagonalisable malgré la présence d'une valeur propre multiple, à savoir* 1.