APPLICATIONS LINEAIRES

Définition :

Soit $E, F$ 2 $K.e.v$ et $f$ une application de $E$ dans $F$, on dit que $f$ est une application linéaire si :

 1.$ ∀x,y\in E, f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right).$

2. $∀λ\in K, ∀x\in E, f\left(λx\right)=λf\left(x\right).$

Remarque : l’ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ est noté par $L(E,F)$. $L\left(E,F\right)$ est un 𝕂-espace vectoriel. Si $ E=F$, on note $L\left(E\right)$

Exemple1 : $R^{3}$ et $R^{2}$ étant 2 ℝ.e.v

Soit $f:R^{3}\rightarrow R^{2}$, une application définie par :

$∀\left(x,y,z\right)\in R^{3}, f\left(x,y,z\right)=(x+z,2y)$. $f$ est une application linéaire.

En effet :

1. $∀\left(x,y,z\right), \left(x^{'},y^{'},z^{'}\right)\in R^{3}, f\left[\left(x,y,z\right)+ \left(x^{'},y^{'},z^{'}\right)\right]=f\left(x+x^{'},y+y^{'},z+z^{'}\right)=\left[\left(x+x^{'}\right)+\left(z+z^{'}\right),2\left(y+y^{'}\right)\right]=\left[\left(x+z\right)+\left(x^{'}+z^{'}\right),\left(2y+2y^{'}\right)\right]=\left[\left(x+z\right),2y\right]+[\left(x^{'}+z^{'}),2y^{'}\right]=f\left(x,y,z\right)+f\left(x^{'},y^{'},z^{'}\right).$
2. $∀λ\in R, ∀\left(x,y,z\right)\in R^{3},f\left[λ\left(x,y,z\right)\right]=f\left(λx,λy,λz\right)=\left(λx+λz,2λy\right)=λ\left(x+z,2y\right)=λf\left(x,y,z\right).$

Propriétés :

Soit $E, F$ 2 $K.e.v$ et $f:E\rightarrow F$ une application linéaire alors:

1. $f\left(0\right)=0.$
2. $f$ linéaire $⇔$ [ $∀λ,μ\in K, ∀x,y\in E, f\left(λx+μy\right)=λf\left(x\right)+μf\left(y\right)].$
3. Si $F$ est un s.e.v de $E$ et $H$ un s.e.v de $F$ alors $f(F)$ est un s.e.v de $F$ et $f^{-1}(H)$ est un s.e.v de $E$.

Image et noyau d’une application linéaire :

Soit$ E, F$ 2 $K.e.v$ et $f:E\rightarrow F une application linéaire $:

1. On appelle image de $f$ et on note par $Imf$ l’ensemble $Imf$ $=\left\{f\left(x\right);x\in E\right\}=f(E)⊂F$.
2. On appelle noyau de $f$ et on note par $Kerf$ l’ensemble $ Kerf=\{x\in E:f\left(x\right)=0\}⊂E$.
3. $Imf$ est un s.e.v de $F$ et $Kerf$ est un s.e.v de $E$.
4. $f$ est surjective $⇔$ $Imf=F$.
5. $f$ est injective $⇔$ $Kerf=\{0\}$.
6. Soit $\{e\_{1},e\_{2},…e\_{n},\}$ un système de vecteur de $E$.
* Si $f $ est injective et le système $\{e\_{1},e\_{2},…e\_{n}\}$ est libre dans $E$ alors le système $\{f(e\_{1}),f(e\_{2}),…f(e\_{n})\}$ est libre dans $ F$.
* Si $f$ est surjective et le système $\{e\_{1},e\_{2},…e\_{n}\}$ est générateur de $E$ alors le système $\{f(e\_{1}),f(e\_{2}),…f(e\_{n})\}$ est générateur de $F$.
* Si $f$ est bijective et le système $\{e\_{1},e\_{2},…e\_{n}\}$ est une base de $E $alors le système $\{f(e\_{1}),f(e\_{2}),…f(e\_{n})\}$ est une base de $ F$.

Définition :

Soit $E.F$ 2𝕂.e.v de dimensions finies et$ f:E\rightarrow F une application linéaire $, on appelle rang de $f$ et on note par $rg(f)$ le nombre $ rg(f)=dim$ $(Imf)$.

Théorème du rang :

Soit $E.F$ 2𝕂.e.v de dimensions finies et $f:E\rightarrow F une application linéaire$, alors

$dimE=dimKerf+rg(f)$.

Corollaire1 :

Soit $E.F$ 2𝕂.e.v de dimensions finies avec $dimE= dimF$

et$ f:E\rightarrow F une application linéaire, $alors :

$f$ injective $⇔f$ surjective $⇔$ $f$ bijective.

Corollaire2

Soit $E$ un 𝕂.e.v de dimension finie et $f:E\rightarrow E une application linéaire$, alors

$f$ bijective $⇔$ $Kerf=\left\{0\right\}⇔Imf=E$.