Micro-interrogation n°01 en Logique mathématique
Section A
Durée : 1H10

Exercice 1 (2 pts) :

Écrivez une machine de Turing qui reconnait les mots qui ont la forme $(01)^n$ sachant que n est un entier et n ≥ 1. Le symbole blanc est le # , le ruban contient plusieurs mots séparés par un # et deux # successifs représentent la fin du ruban.
Exemple : si la machine trouve au début sur le ruban # 010110 # 10 # 0101 ##
Elle renvoie # 010110 **F** 10 **F** 0101 **T**#

Exercice 2 (3,5 pts) :

Considérons le système formel suivant :

- $\Sigma = \{a, b, c\}$ est l'ensemble des symboles appelé l'ensemble d'alphabet.
- W est l'ensemble des formules bien formées, il contient les symboles a, b, c ainsi que toutes les expressions de la forme aa...abcc...c notées a$^n bc^m$, avec (n,m)$\in N^2$. Ex : a^0bc^0 représente en réalité le mot : b et a^2bc^2 représente le mot : aabcc.
- A c'est l'ensemble des axiomes qui ont la forme suivante : $\{a^{2i}bc^{2i} | i \in N\}$.
- Il y a une seule règle d'inférence r_1 : $(a^n bc^m, a^k bc^p) \longrightarrow a^n bc^{m+p}$.

Questions :

- Q1 : Les mots suivants : bc^{10}, a^4bc^8, a^6bc^4 sont-ils des théorèmes ? Justifiez votre réponse.
- Q2 : Quelle est parmi les formes suivantes la forme générale qui représente le langage généré par ce système formel ?
  - a- $\{a^{4k}bc^{2i} | (i,k) \in N^2\}$.
  - b-$\{a^{2k}bc^{2i} | (i,k) \in N^2\}$.
  - c- $\{a^{2k}bc^{2i} | (i,k) \in N^2 etk = i\}$.
  - d- $\{a^{2k}bc^{i} | (i,k) \in N^2 etk \geq i\}$.
  - e- $\{a^{2k}bc^{2i} | (i,k) \in N^2 etk \leq i\}$.

Exercice 3 (4,5 pts) :

1. Donnez la table de vérité de la formule suivante :
   F $= (p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$ puis dites si elle est valide, vérifiable ou invérifiable.
2. Donnez la forme FNC de la formule F.
3. Donnez l'arbre syntaxique de la formule F.

Solution micro 1 (Section A).

Exercice 1. (2pts).

$$\left.\begin{array}{l} q_0 \, 0 \, D \, q_1 \\ q_1 \, 1 \, D \, q_2 \\ q_2 \, * \, T \, q_2 \\ q_2 \, T \, D \, q_3 \\ q_3 \, * \, \text{Arrêt} \end{array}\right\} (1pt) \quad \begin{array}{l} q_2 \, 1 \, D \, q_4 \\ q_4 (0,1) \, D \, q_4 \\ q_4 \, * \, F \, q_4 \\ q_4 \, F \, D \, q_3 \\ q_2 \, 0 \, D \, q_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} q_3 \, 0 \, D \, q_1 \\ q_0 \, 1 \, D \, q_4 \\ q_3 \, 1 \, D \, q_4 \\ q_1 \, 0 \, D \, q_4 \\ q_1 \, * \, F \, q_4 \end{array}$$

(1pt)

Exercice 2. (3,5 pts).

q_1:

(0,5pt) (0,5pt)

* Le mot bc^{10} est un théorème, car si on remplace i par 0 dans la forme des axiomes $\{a^{2i}bc^{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$, on aura l'axiome $a_1 : b$

et si on remplace le i par 5, on aura l'axiome $a_2 : a^{10}bc^{10}$.

En appliquant la règle $r_1 : (b, a^{10}bc^{10}) \xrightarrow{r_1} bc^{10}$

* Le mot a^4bc^8 est un théorème, car si on remplace dans la forme des axiomes le i par 2, on aura : (1pt)

$a_1 : a^4bc^4$ puis en appliquant $(a^4bc^4, a^4bc^4) \xrightarrow{r_1} a^4bc^8$

* a^6bc^4 n'est pas un théorème, car on a toujours (1pt)

$n \leq m + p$.

q_2: La forme générale de ce système formel est la - e -

(0,5pt)

①

Exercice 3: (4,5 pts) (1 pt)

1) La table de vérité de la formule F

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\to r$	$(p\to(q\to r))\to(p\to r)$	F
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V		V

La formule F est valide. (0,5 pt)

2). La FNC de la formule F.

$(p\to q)\to((p\to(q\to r))\to(p\to r))$

$\equiv \neg(p\to q)\vee((p\to(q\to r))\to(p\to r))$

$\equiv (p\wedge\neg q)\vee(\neg(p\to(q\to r))\vee(p\to r))$

$\equiv (p\wedge\neg q)\vee(\neg(\neg p\vee(q\to r))\vee(\neg p\vee r))$

$\equiv (p\wedge\neg q)\vee((p\wedge(q\wedge\neg r))\vee(\neg p\vee r))$

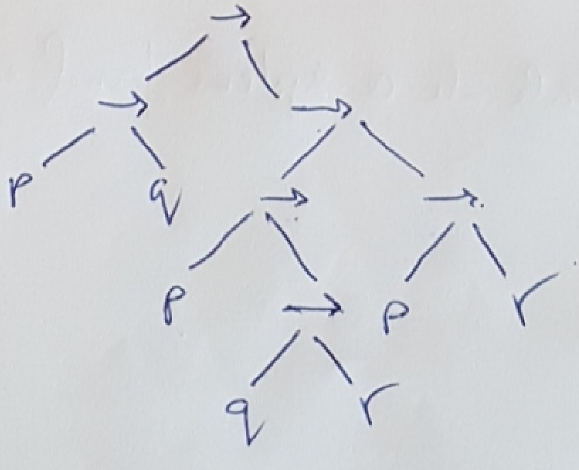
$\equiv (p\wedge\neg q)\vee((p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\vee r))$

$\equiv (p\wedge\neg q)\vee(\cancel{(p\vee\neg p\vee r)}\wedge(q\vee\neg p\vee r)\wedge\cancel{(\neg r\vee\neg p\vee r)})$

$\equiv (p\wedge\neg q)\vee(q\vee\neg p\vee r)$

$\equiv (p\vee q\vee\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee q\vee\neg p\vee r)$ → FNC. (2 pts)

3). L'arbre syntaxique de la formule F est:



(1 pt)

②