(7pts) Corrigé de l'examen.

Ex 1 : Soit à résoudre le système ci-dessous par factorisation LU de la matrice du système $Ax=b$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Soit

$$A = L.U \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

Par identification, on obtient :

- $u_{11} = 2$ (0,25), $u_{12} = 0$ (0,25), $u_{13} = 1$ (0,25)
- $l_{21} = 0$ (0,25) ; $u_{22} = 2 - l_{21}u_{12} = 2$ (0,5), $u_{23} = 1 - l_{21}u_{13} = 1$ (0,5).
- $l_{31} = \frac{1}{u_{11}} = \frac{1}{2}$ (0,25) ; $l_{32} = (1 - l_{31}u_{12})/u_{22} = 1/2$ (0,5) ; $u_{33} = 2 - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 1$ (0,5)

D'où, on a : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ (0,25) ; $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (0,25)

2) Résolution : $Ax = b \Leftrightarrow LU.x = b$. Soit, en posant, $y = UX$.

on a résoudre : $\begin{cases} LY = b \\ UX = Y. \end{cases}$ (0,25) a). $LY = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow y_1 = 1 ; \quad y_2 = 1 ; \quad y_3 = 1 - \frac{y_1}{2} - \frac{y_2}{2} = 0 \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1)

b). $UX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$x_3 = 0 ; \quad x_2 = (1 - x_3)/2 = 1/2 ; \quad x_1 = (1 - x_3)/2 = 1/2$ (1)

d'où la solution du système est $X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Déduire le déterminant de A.

on a : $\det A = \det(LU) = (\det L) \cdot (\det U)$ (0.25)

et L et U sont deux matrices triangulaires, donc

$\det L = 1 \times 1 \times 1 = 1$ (0.25) $\det U = 2 \times 2 \times 1 = 4$ (0.25)

d'où $\det A = 1 \cdot 4 = 4$ (0.25)

Ex 2 : (8 pts)

$A = \begin{pmatrix} 4 & -\alpha \\ \alpha & 4 \end{pmatrix}$.

(1) La matrice itérative T de Jacobi.

on a : $T = D^{-1}(L + U)$ (0.5) avec

$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} ; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} ; \quad U = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3 × 0.25)

$\Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ (0.5) $\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{4} \\ \frac{\alpha}{4} & 0 \end{pmatrix}$ (0.5)

- Pour quelle valeur α de $\mathbb{R}$, cette méthode est convergente ?

$\|T\| < 1$ (0,25) $\Leftrightarrow \|T\| = \max\left(\frac{|\alpha|}{4}, \frac{|\alpha|}{4}\right) = \frac{|\alpha|}{4} < 1 \Rightarrow$ (0,5)

$\alpha \in]-4, 4[$ (0,25)

② $\alpha = 1$; $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le schéma itératif de Jacobi est : $\left(X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$.

$D X^{(k+1)} = (L+U) X^{(k)} + b \Leftrightarrow$ (0,25)

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (0,25)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(y^{(k)} + 1\right) \\ y^{(k+1)} = \frac{1}{4} x^{(k)} \end{cases}$ (0,5)

<u>1re itération</u> : $k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^{(1)} = \frac{1}{4}(0+1) = 1/4 ; \\ y^{(1)} = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1,25)

<u>2e itération</u> : $k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^{(2)} = \frac{1}{4}\left(y^{(1)} + 1\right) = \frac{1}{4}(0+1) = 1/4 \\ y^{(2)} = \frac{1}{4} x^{(1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) = 1/16 \end{cases} \Rightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/16 \end{pmatrix}$ (1,25)

<u>3e itération</u> : $k = 2 \Rightarrow \begin{cases} x^{(3)} = \frac{1}{4}\left(y^{(2)} + 1\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} + 1\right) = \frac{17}{64} \\ y^{(3)} = \frac{1}{4} x^{(2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow X^{(3)} = \begin{pmatrix} 17/64 \\ 1/16 \end{pmatrix}$ (1,25)

Ex 3 : (4pts) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

- La méthode de la puissance itérée : $x^{(k+1)} = A\, y^{(k)}$ avec $y^{(0)} = x^{(0)}$ 0,25

1°) $x^{(1)} = A \cdot y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 0,5 $\Rightarrow \lambda_1^{(1)} = 2$ 0,5

$\Rightarrow y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 0,25

2°) $\Rightarrow x^{2} = A\, y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 0,5 $\Rightarrow \lambda_1^{(2)} = 4$ 0,5

$\Rightarrow y^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1 \end{pmatrix}$ 0,25

3°) $x^{(3)} = A\, y^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix}$ 0,5 $\Rightarrow \lambda_1^{(3)} = \frac{13}{4} = 3,25$ 0,5

$\Rightarrow y^{(3)} = \begin{pmatrix} 1/26 \\ 1 \end{pmatrix}$. 0,25

On remarque que la suite $\lambda_1^{(k)}$ converge vers la valeur propre 3 et les vecteurs $y^{(k)}$ convergent vers le vecteur propre ~~v~~$_1$ associé à la valeur propre 3. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.