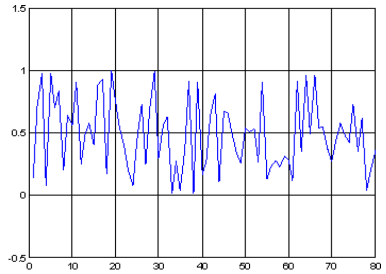
EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL
LICENCE
DUREE : 1 HEURE



1. (0.5 point) Le signal représenté sur la figure est un signal :
- déterministe
- Echantillonné
- <u>Aléatoire</u>
- Périodique

2. (0.5 point) Un signal physiquement realisable (une seule réponse)

(a) sa puissance moyenne totale est nulle
(b) est causal
(c) n'est pas périodique
(d) son énergie totale est finie
(e) <u>toutes les réponses précédentes conviennent</u>
(f) aucune des réponses précédentes ne convienne

<u>Précisions supplémentaires : En effet, un signal physiquement realizable doit être causal, sa puissance moyenne nulle, non périodique et à énergie totale finie.</u>

3. (0.5 point) Un bruit électrique (une seule réponse)
- Peut être déterministe
- Peut être aléatoire
- Peut être appelé blanc
- Peut être appelé rose
- Peut être dû à la température
- **<u>Toutes les réponses précédentes conviennent</u>**
- Aucune des réponses précédentes ne convienne

<u>Précisions supplémentaires : Un bruit peut aussi bien déterministe (comme par exemple l'interférence avec le 50 Hz du secteur) et aléatoire (comme les bruits d'origine thermique et autres). En effet, il y'a des bruits appelés blanc et d'autres roses …</u>

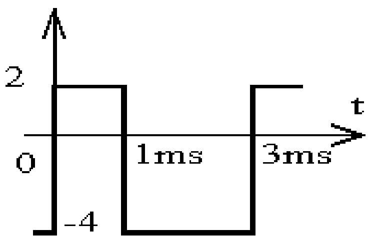
4. (0.5 point) Le spectre d'un signal continu périodique réel est :

a) continu et périodique
<u>b) discret</u>
c) de module pair
d) de module impair
e) aucune des réponses précédentes ne convienne

5. (0.5 point) La relation de Parseval :
- **<u>porte sur le calcul de la puissance d'un signal</u>**
- permet le calcul d'une transformée de Fourier rapide
- ne s'applique pas aux signaux périodiques
- ne s'applique pas aux signaux non périodiques

6. (2 points) Soit le signal périodique suivant (on a représenté une seule période=3ms)
La valeur moyenne du signal est égale à :
- **<u>-6</u>**
- -2
- 0
- 2
- aucune des réponses précédentes ne convienne

<u>Précisions supplémentaires :</u>
<u>La valeur moyenne d'un signal périodique revient à calcule</u>
<u>Son integrale sur une periode et la diviser par la periode T=3ms</u>

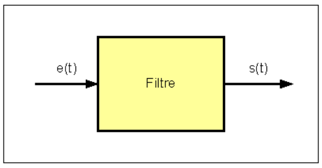


La valeur efficace (ou rms) du signal est égale à :

- 5
- 8
- 6
- 9
- **aucune des réponses précédentes ne convienne**

Précisions supplémentaires :
La puissance moyenne d'un signal périodique revient à calculer l'integrale du carré du module du signal sur une periode (égale à 36) et la diviser par la période T=3ms. Ce qui doit nous donner une puissance moyenne totale égale à 12.
Maintenant, une valeur efficace c'est la racine carré de la puissance moyenne.
La valeur efficace est égale à la racine carré de 12.

7. (0.5 point) La sortie d'un filtre s'obtient par la convolution :



- **du signal d'entrée avec la réponse impulsionnelle du filtre**
- du signal d'entrée avec la fonction de transfert du filtre
- de la transformée de Laplace du signal d'entrée avec la fonction de transfert du filtre
- du signal d'entrée avec le signal de sortie
- du signal d'entrée avec lui-même

8. (1 point) Pour un circuit RC passe-haut, lorsqu'on lui applique à son entrée un échelon unitaire u(t) (u(t) = 1 si t>0 et u(t)=0 si t<0) la tension à sa sortie suit la forme suivante

$e^{-t/RC}$
$e^{t/RC}$
1
$1-e^{-t/RC}$

Précisions supplémentaires : Un filtre passe-haut laisse passer que les variations temporelles rapides d'un signal et bloque les variations lentes ou constantes. Le signal d'entrée u(t) présente une variation rapide uniquement à t=0 (passage de 0 à 1) et ensuite il reste constant. Donc le filtre passe-haut doit laisser passer que la variation de 0 à 1 à l'origine (t=0) ensuite la sortie de ce filtre doit revenir plus ou moins rapidement (ça ca dépendre des valeurs de R et C) à 0. Parmi les solutions proposées seul exp(-t/RC) présente cette forme de la sortie.

9. 1 point) Pour un circuit RC passe-bas, lorsqu'on lui applique à son entrée un échelon unitaire u(t) (u(t) = 1 si t>0 et u(t)=0 si t<0) la tension à sa sortie suit la forme suivante

$e^{-t/RC}$
$e^{t/RC}$
1
$1-e^{-t/RC}$

Précisions supplémentaires : Un filtre passe-bas laisse bloquer les variations temporelles rapides d'un signal et laisse passer les variations lentes ou constantes. Le signal d'entrée u(t) présente une variation rapide uniquement à t=0 (passage de 0 à 1) et ensuite il reste constant. Donc le filtre passe-bas doit bloquer que la variation de 0 à 1 à l'origine (t=0) (la sortie du filtre doit être 0 à l'instant t=0) ensuite la sortie de ce filtre doit revenir plus ou moins rapidement (ça ca dépendre des valeurs de R et C) à 1 car une valeur constante passe à travers un filtre psse-bas. Parmi les solutions proposées seul 1-exp(-t/RC) présente cette forme de la sortie.

10. (0.5 point) On lance un dé. X est la variable aléatoire égale au chiffre obtenu. P(X<4)= ?

1/2, 1/3, 1/4, ou bien 1/6

Précisions supplémentaires : La probabilité d'avoir une face d'un Dé parmi les 6 faces est P(X=xi)=1/6. Or on nous demande P(X<4) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = 1/6 +1/6 +1/6 = 3/6 = 1/2

11. (1 point) Lequel des lois de probabilités standards mentionnés ci-dessous sont des variables aléatoires discrètes (une seule réponse)?

- Distribution de Poisson
- Distribution de Bernoulli
- Distribution Binomiale
- **Tout ce qui précède**

Précisions supplémentaires : La loi de Poisson, la la de Bernouli et la loi Bionomiale sont des lois discrètes.

12.(2 points) La variable aléatoire X suit une loi binomiale B(10; 0,20). Prob(X=6) est égale à :
0,55, 0,055, **0,0055,** 0,04, ou bien 0,0234
Précisions supplémentaires
Pour une loi discrète binomiale, la probabilité peut être calculée par:

$$p(X = k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k} \quad \text{avec} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dans notre cas nous avons B(10; 0,20), c'est-à-dire n=10 et p=0,20 et on déduit que q=1-p=0,80

$$p(X = 6) = C_{10}^6\, 0.2^6\, 0.8^{10-6} \quad \text{avec} \quad C_{10}^6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = 210$$

$$p(X = 6) = 210 \times 0.2^6\, 0.8^{10-6} = 210 \times 0{,}000064 \times 0{,}4096 = 0{,}0055$$

13. (1 point) Vous décidez de collecter un tas de canettes de soda et de mesurer le volume de soda dans chaque canette. Soit x = le nombre de ml de soda dans chaque canette. Quel type de variable est x ?
- x est une variable aléatoire discrète
.x est une variable aléatoire continue
.x est une constante
x n'est pas une variable aléatoire
.
14. (1point) Vous décidez de mener une enquête auprès des familles avec deux enfants. Vous souhaitez compter le nombre de garçons (sur 2 enfants) dans chaque famille. Est-ce une variable aléatoire? Si c'est le cas, quelles sont toutes ses valeurs possibles
.Oui, c'est une variable aléatoire, et ses valeurs peuvent être 1 et 2
.Oui, c'est une variable aléatoire et ses valeurs sont 0, 1 ou 2
.Oui, c'est une variable aléatoire, et ses valeurs peuvent être 2 ou 4
.Non, ce n'est pas une variable aléatoire, puisqu'elle n'est pas aléatoire

15. (1 point) Laquelle des propositions suivantes N'EST PAS une propriété d'une variable aléatoire .
.La somme des probabilités d'une variable aléatoire est égale à 1
.Une variable aléatoire ne peut pas être négative
.Une variable aléatoire représente des résultats numériques pour différentes situations ou événements
.Une variable aléatoire peut être discrète ou continue

16. (1 point) Qui donne la mesure du caractère aléatoire de la variable aléatoire
a) la moyenne
b) Variance
c) Écart-type
d) fonction de densité de probabilité

17. (1 point) Considérons un dé avec la propriété que la probabilité d'une de ses six faces avec n points apparaisse est proportionnelle à n. La probabilité que la face affiche 4 points est
a) 1/7
b) 5/42
c) 1/21
d) 4/21

Précisions supplémentaires: Comme pour ce dé la probabilité pour chacune de ses faces est proportionnelle à la valeur de sa face. Autrement dit, pour obtenir la face 1 on a une probabilité égale à 1/k, pour avoir la face 2 on a une probabilité égale à 2/k, pour avoir la face 3 on a une probabilité égale à 3/k, pour avoir la face 4 on a une probabilité égale à 4/k, pour avoir la face 5 on a une probabilité égale à 5/k et pour avoir la face 6 on a une probabilité égale à 6/k.
Maintenant, comme la somme de toute les probabilités doit être égale à 1, nous avons :

$$1/k + 2/k + 3/k + 4/k + 5/k + 6/k = 1 \Rightarrow k = 21$$

On déduit donc que pour avoir la face affichant 4 nous avons la probabilité 4/21

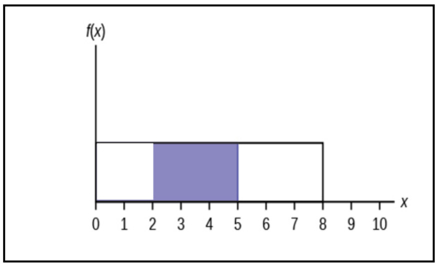
(1 point) L'espérance mathématique de cette variable aléatoire est égale à

Solution
$E(X) = \sum xi \times P(X=xi) = 1\times1/21 + 2\times2/21 + 3\times3/21 + 4\times4/21 + 5\times5/21 + 6\times6/21 =$
$[1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36]/21 = 4{,}33$

La variance de cette variable aléatoire est égale à (1 point)

Solution
$Var(X) = E(X-E(X))^2 = \sum(xi-E(X))^2 \times P(X=xi) = (1-4{,}33)^2 \times 1/21 + (2-4{,}33)^2 \times 2/21 + (3-4{,}33)^2 \times 3/21 + (4-4{,}33)^2 \times 4/21 + (5-4{,}33)^2 \times 5/21 + (6-4{,}33)^2 \times 6/21 = 11{,}08 \times 1/21 + 5{,}43 \times 2/21 + 1{,}77 \times 3/21 + 0{,}11 \times 4/21 + 0{,}45 \times 5/21 + 2{,}78 \times 6/21 = [11{,}08 + 10{,}86 + 5{,}31 + 0{,}44 + 2{,}25 + 16{,}68] / 21 = 2{,}22$

19. (1 point) Pour la distribution continue suivante (représentées ci-dessous) la probabilité limitée par la couleur sombre (violet) est égale à.
4/8
3/8
5/8
2/8



Précisions supplémentaires
Comme la loi de probabilité est uniforme entre 0 et 8 f(x) doit être constante avec f(x)=1/8. En effet, l'intégrale de f(x) sur toutes les valeurs de x doit être égale à 1.
Il s'agit d'une loi de probabilité continue. Si nous voulons calculer une probabilité sur un intervalle alors on intègre la distribution de la probabilité f(x) (=1/8 ∀x) entre cet intervalle soit entre 2 et 5, nous donne donc 3/8.

(1 point) L'espérance mathématique de cette variable aléatoire est égale à
4
5
4.5
3

Précisions supplémentaires :
Pour une loi de probabilité continue E(X) est égale à l'intégrale de xf(x) sur tout l'intervalle des valeurs de x ∈ [0, 8]
Comme f(x) = 1/8 (une constante sur tout l'intervalle des valeurs de x. alors l'intégrale nous donne $x^2/16|_0^8 = 4$

(1 point) La variance de cette variable aléatoire est égale à

Solution
Pour une loi de probabilité continue Var(X) est égale à l'intégrale de $(x-E(X))^2 f(x)$ sur tout l'intervalle des valeurs de $x \in [0, 8]$
Comme f(x) = 1/8 (une constante sur tout l'intervalle des valeurs de x alors on aura à calculer l'intégrale: $(x-4)^2/8$ sur l'intervalle de $x \in [0, 8]$
Ce qui nous donne donc : $1/8 \times [x^3/3 - 2x^2 + 16x]^8_0 = 21,33 - 16 + 16 = 21,33$

20. (1 point) Pour la fonction suivante, définie sur l'intervalle [0;2], la valeur de k pour qu'elle soit une densité de probabilité. $f(x) = kx^3$
Est égale à
k=8, k=2, **k=4,** ou bien k=16

Précisions supplémentaires
Comme la somme ou l'intégrale d'une fonction de densité de probabilité doit être égale à 1, alors il suffit d'intégrer la fonction f(x) entre 0 et 2 et d'obtenir un résultat égal à 1