1. Codage de l'information

1.1 Codage en général : le pourquoi

- Dans une machine, toutes les informations sont codées sous forme d'une suite de "0" et de "1" (langage binaire). Mais l'être humain ne parle généralement pas couramment le langage binaire.

- Il doit donc tout "traduire" pour que la machine puisse exécuter les instructions relatives aux informations qu'on peut lui donner.
- Le codage étant une opération purement humaine, il faut produire des algorithmes qui permettront à la machine de traduire les informations que nous voulons lui voir traiter. C'est une opération établissant une bijection entre une **information** et une **suite de " 0 " et de " 1 "** qui sont représentables en machine.

1.2 Codage des caractères : code ASCII

Parmi les codages les plus connus et utilisés, le codage **ASCII**(American Standard Code for Information Interchange)étendu est le plus courant (version **ANSI** sur Windows).

- Voyons quelles sont les nécessités minimales pour l'écriture de documents alphanumériques simples dans la civilisation occidentale. Nous avons besoin de :

  Un alphabet de lettres minuscules ={a,b,c,...,z}
  soient 26 caractères

  Un alphabet de lettres majuscules ={A,B,C,...,Z}
  soient 26 caractères

  Des chiffres {0,1,...,9}
  soient 10 caractères

  Des symboles syntaxiques {? , ; (" ...
  au minimum *10 caractères*

  TOTAL minimal = *72 caractères*

Si l'on avait choisi un code à 6 bits le nombre de caractères codifiables aurait été de $2^6 = 64$, nombre donc insuffisant pour nos besoins. Il faut au minimum 1 bit de plus qui permet de définir ainsi $2^7 = 128$ nombres binaires différents, autorisant le codage de 128 caractères.

- Initialement le code ASCII est un code à 7 bits (128 caractères) ; il a été étendu à un code 8 bits($2^8 = 256$ caractères) permettant le codage des caractères nationaux (en France les caractères accentués comme : ù,à,è,é,â,...etc) et les caractères semi-graphiques. Les pages HTML qui sont diffusées sur le réseau Internet sont en code ASCII 8 bits.
- Un codage récent dit " universel " est en cours de diffusion : il s'agit du codage **Unicode** sur 16 bits ($2^{16} = 65536$ caractères).

  De nombreux autres codages existent adaptés à diverses solution de stockage de l'information (DCB, EBCDIC,...).

1.3 Codage des nombres entiers : numération

Les nombres entiers peuvent être codés comme des caractères ordinaires. Toutefois les codages adoptés pour les données autres que numériques sont trop lourds à manipuler dans un ordinateur. Du fait de sa constitution, un ordinateur est plus " habile " à manipuler des nombres écrits en numération binaire (qui est un codage particulier).

Nous allons décrire trois modes de codage des entiers les plus connus:

Rappel de numération :

Nous avons l'habitude d'écrire nos nombres et de calculer dans le système décimal. Il s'agit en fait

d'un cas particulier de numération en base 10.

Il est possible de représenter tous les nombres dans un système à base b (b entier, b>1). Nous ne présenterons pas ici un cours d'arithmétique, mais seulementles éléments nécessaires à l'écriture dans les deux systèmes les plus utilisés en informatique : le binaire (b=2) et l'hexadécimal(b=16).

Lorsque nous écrivons 5876 en base 10, la position des chiffres 5,8,7,6 indique la puissance de 10 à laquelle ils sont associés :

5 est associé à 10^3
8 est associé à 10^2
7 est associé à 10^1
6 est associé à 10^0

Il en est de même dans une base b quelconque (b=2, ou b=16). Nous conviendrons de mentionner la valeur de la base au dessus du nombre afin de savoir quel est son type de représentation.

Soit $\overline{x_n x_{n-1} \cdots x_0}^{b}$ un nombre **x** écrit en base b avec n+1 symboles.

- " $\mathbf{x_k}$ " est le symbole associé à la puissance " $\mathbf{b^k}$"
- " $\mathbf{x_k}$ " {0,1, ... , b-1}

Lorsque b=2 (numération binaire)

" $\mathbf{x_k}$ " {0,1}, les nombres binaires sont donc écrits avec des 0 et des 1, qui sont représentés physiquement par des bits dans la machine. Voici le schéma d'une mémoire à n+1 bits (au minimum 8 bits dans un micro-ordinateur) :

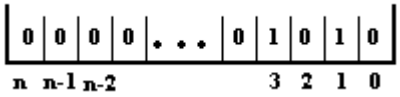
Les cases du schéma représentent les bits, le chiffre marqué en dessous d'une case indique la puissance de 2 à laquelle est associé ce bit (on dit aussi le *rang* du bit).

Le bit de rang 0 est appelé le bit de **poids faible**.
Le bit de rang n est appelé le bit de **poids fort**.

1.4 Les entiers dans une mémoire à n+1 bits : binaire pur

Ce codage est celui dans lequel les nombres entiers **naturels** sont écrits en numération binaire (en base b=2).

Le nombre " dix " s'écrit 10 en base b=10, il s'écrit 1010 en base b=2.
Dans la mémoire il est codé :

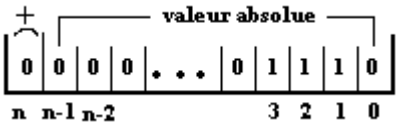


Pour une mémoire à n+1 bits (n>1), tous les entiers naturels de l'intervalle [0 , 2^{n+1} -1] seront représentés.

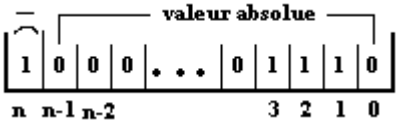
- *soit pour n+1=8 bits tous les entiers de l'intervalle [0 , 255]*
- *soit pour n+1=16 bits tous les entiers de l'intervalle [0 , 65535]*

1.5 Codage des nombres entiers : binaire signé

Ce codage permet la représentation des nombres entiers relatifs. Dans la représentation en binaire signé, le bit de poids fort sert à représenter le signe (0 pour un entier positif et 1 pour un entier négatif), les **n** autres bits représentent la valeur absolue du nombre en binaire pur.



+14 est représenté par 0000...01110



-14 est représenté par 1000...01110

Pour une mémoire à n+1 bits (n>1), tous les entiers naturels
de l'intervalle [-(2^n - 1),(2^n -1)]seront représentés.

- *soit pour n+1=8 bits, tous les entiers de l'intervalle [-127 , 127]*

- *soit pour n+1=16 bits, tous les entiers de l'intervalle [-32767 , 32767].*

Le nombre zéro est représenté dans cette convention (dites du zéro positif)par : **0**000...00000

Il reste malgré tout une configuration mémoire inutilisée : **1**000...00000. Cet état binaire ne représente à priori aucun nombre entier ni positif ni négatif de l'intervalle $[-(2^n - 1),(2^n -1)]$. Afin de ne pas perdre inutilement la configuration **"** **1**000...00000 ", les informaticiens ont décidé que cette configuration représente malgré tout un nombre négatif parce que le bit de signe est 1, et en même temps la puissance du bit contenant le "1", donc -2^n.

L'intervalle de représentation se trouve alors augmenté d'un nombre :
il devient :$[-2^n ,2^n -1]$.

- *soit pour n+1=8 bits, tous les entiers de l'intervalle [-128 , 127]*
- *soit pour n+1=16 bits, tous les entiers de l'intervalle [-32768 , 32767]*

Ce codage n'est pas utilisé tel quel, il est donné ici à titre pédagogique. En effet le traitement spécifique du signe coûte cher en circuits électroniques et en temps de calcul. C'est une version améliorée qui est utilisée dans la plupart des calculateurs : elle se nomme le complément à deux.

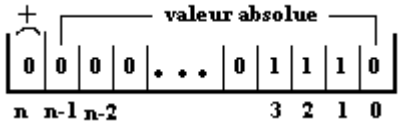
*1.6 Un autre codage des nombres entiers : **complément à deux***

Ce codage, purement conventionnel et très utilisé de nos jours, est dérivé du binaire signé ; il sert à représenter en mémoire les entiers relatifs.

Comme dans le binaire signé, la mémoire est divisée en deux parties inégales; le bit de poids fort représentant le signe, le reste représente la valeur absolue avec le codage suivant :

Supposons que la mémoire soit à n+1 bits,
soit **x** un entier relatif à représenter.

- si **x > 0,** alors c'est la convention en *binaire signé* qui s'applique (le bit de signe vaut 0, les n bits restants codent le nombre), soit pour le nombre +14 :



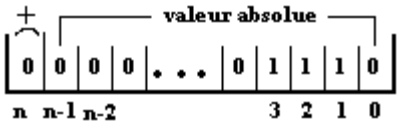
*+14 est représenté par **0**000...01110*

- Si x < 0, alors

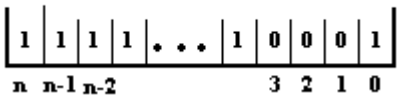
- on code **|x|** en binaire signé.
- puis l'on complémente tous les bits de la mémoire (complément à 1 ou complément restreint). Cette opération est un non logique effectué sur chaque bit de la mémoire.

- Enfin l'on additionne **1** au nombre binaire de la mémoire (addition binaire).

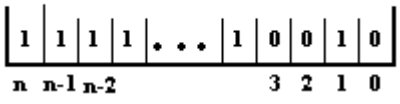
  Exemple :soit à représenter le nombre -14

- 

codage de |-14|= 14

- 

complément à 1

- 

addition de 1

Le nombre -14 s'écrit donc en complément à 2 : 1111..10010.

Un des intérêts majeurs de ce codage est d'intégrer la soustraction dans l'opération de codage et de ne faire effectuer que des opérations simples et rapideslogique, addition de 1).

2. Numération

2.1 Opérations en binaire

Nous avons parlé d'addition en binaire ; comme dans le système décimal, il nous faut connaître les tables d'addition, de multiplication, etc... afin d'effectuer des calculs dans cette base. Heureusement en binaire, elles sont très simples :

addition

+	0	1
0	0	1
1	1	0(**1**)

*0(**1**) représente la retenue 1 à reporter.*

multiplication

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Exemples *de calculs :*

addition	***multiplication***
1101101 **+** *10011* ——————— *10000000*	*10110* **x** *101* ——————— *10110* *10110..* ——————— *1101110*

Vous noterez que le procédé est identique à celui que vous connaissez en décimal. En hexadécimal (b=16) il en est de même. Dans ce cas les tables d'opérateurs sont très longues à apprendre.

Etant donné que le système classique utilisé par chacun de nous est le système décimal, nous nous proposons de fournir d'une manière pratique les conversions usuelles permettant de passer de la représentation d'un nombre entre les systèmes décimal, binaire et hexadécimal.

2.2 Conversions base quelconque <=> décimal

Voici ci-dessous un rappel des méthodes générales permettant de convertir un nombre en base b (b>1)en sa représentation décimale et réciproquement.

a) Soit $\overline{x_n x_{n-1} \cdots x_0}^{b}$ un nombre écrit en base b.

Pour le convertir en décimal (base 10), il faut :

- **convertir chaque symbole x_k en son équivalent** $\hat{x}_k$ en base 10, nous obtenons ainsi la suite de chiffres : n,....,0

  exemple : soit b=13, ***les symboles de la base 13 sont: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C}.*** Si $\mathbf{x_k}$=C son équivalent est k=12

- réécrire le nombre comme une somme :

$$\overline{x_n x_{n-1} \cdots x_0}^{\,b} \equiv \sum_{k=0}^{n} x_k\, b^k \quad \xrightarrow[\text{(en base 10)}]{} \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, b^k$$

- effectuer tous les calculs en base 10(somme, produit, puissance).

Exemple : $\overline{2AB8}^{13}$ **à convertir en base10 (b=13)**

Le nombre $\overline{2\ A\ B\ 8}^{13} \equiv 2.13^3 + 10.13^2 + 11.13^1 + 8.13^0$

$= 4394 + 1690 + 143 + 8 = \overline{6235}^{10}$

b) Soit " **a** " un nombre décimal à représenter en base b :

La méthode utilisée est celle de la division euclidienne.

- **Si a < b**, il n'a pas besoin d'être converti.
- **Si a >= b**, on peut diviser a par b. Et l'on divise successivement les différents quotients q_k obtenus par la base b.

De manière générale on aura :

$a = b^k.r_k + b^{k-1}.r_{k-1} + \ldots + b.r_1 + r_0$

où **ri** est le reste de la division de a par b.

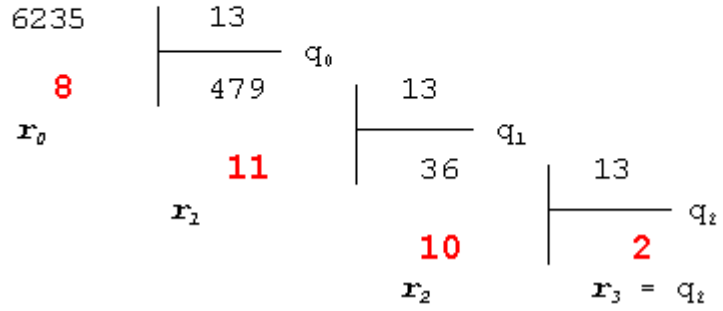
Cela permet, en remplaçant chaque **ri** par son symbole équivalent p_i en base **b**, d'avoir une représentation de a dans la base b :

$$a = \overline{p_k\ p_{k-1} \cdots p_1\ p_0}^{\,b}$$

Exemple :

$\overline{6235}^{10}$ **à convertir en base b=13**

les symboles de la base 13 sont: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C}



Les p_i équivalents en base 13 sont:

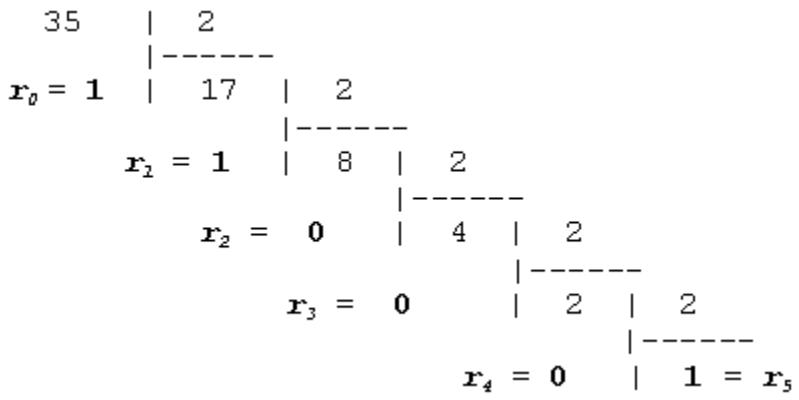
$r_0 = 8$	$p_0 = 8$
$r_1 = 11$	$p_1 = B$
$r_2 = 10$	$p_2 = A$
$r_3 = 2$	$p_3 = 2$

Donc $\overline{:6235}^{10} \equiv \overline{2AB8}^{13}$

Dans les deux paragraphes suivants nous allons expliciter des exemples de ces méthodes dans le cas où la base est 2 (binaire).

*2.3 Exemple de conversion **décimalbinaire***

Soit le nombre décimal 35



Donc : 35 (décimal) 100011(binaire)

*2.4 Exemple de conversion **binairedécimal***

Soit le nombre binaire : 1101101
sa conversion en décimal est immédiate :

1101101 $2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^3 + 2^2 + 1 = 64+32+8+4+1 = 109$ (décimal)

Les informaticiens, pour des raisons de commodité (manipulations minimales de symboles), préfèrent utiliser l'hexadécimal plutôt que le binaire. L'humain, contrairement à la machine, a quelques difficultés à opérer sur des suites importantes de 1 et de 0. Ainsi l'hexadécimal (sa base $b=2^4$ étant une puissance de 2) permet de

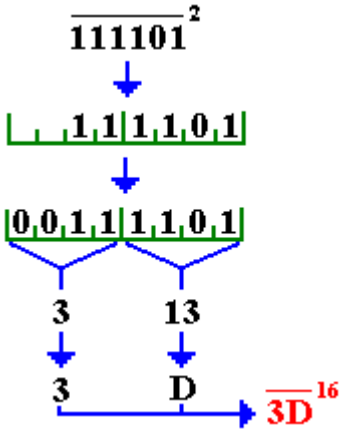
diviser, en moyenne, le nombre de symboles par un peu moins de 4 par rapport au même nombre écrit en binaire. C'est l'unique raison pratique qui justifie son utilisation ici.

2.5 Conversion binairehexadécimal

Nous allons détailler l'action de conversion en 6 étapes :

- Soit a un nombre écrit en **base 2** (***étape 1***).
- On décompose ce nombre par tranches de 4 bits à partir du bit de poids faible (***étape 2***).
- On complète la dernière tranche (celle des bits de poids forts)par des 0 s'il y a lieu (***étape 3***).
- On convertit chaque tranche en son symbole de la **base 16**(***étape 4*****).**
- On réécrit à sa place le nouveau symbole par changements successifs de chaque groupe de 4 bits,(***étape 5***).
- Ainsi, on obtient le nombre écrit en hexadécimal (***étape 6***).

Exemple :

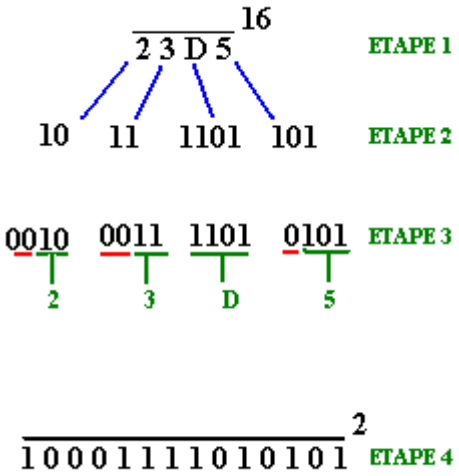


2.6 Conversion hexadécimalbinaire

Cette conversion est l'opération inverse de la précédente. Nous allons la détailler en 4 étapes :

- Soit a un nombre écrit en **base 16** (***ETAPE 1***).
- On convertit chaque symbole hexadécimal en écriture binaire (nécessitant au plus 4 bits)(***ETAPE 2***).
- On complète les bits de poids fort par des 0 s'il y a lieu (***ETAPE 3***).
- Le nombre " **a "** écrit en binaire est obtenu en regroupant toutes les tranches de 4 bits à partir du bit de poids faible, sous forme d'un seul nombre binaire(***ETAPE 4***).

- ***Exemple :***


23D5 16
ETAPE 1
10 11 1101 101
ETAPE 2
0010 0011 1101 0101
ETAPE 3
2 3 D 5
1000111101012
ETAPE 4