Synthèse

Espaces vectoriels : généralités

Exemples d'espaces vectoriels

Les ensembles suivants, munis des lois usuelles, sont des espaces vectoriels :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{K}^n & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \mathbb{K}[X] & \mathbb{K}_n[X] \\ \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \mathbb{K}^{\Omega} \quad (\Omega \text{ ensemble}). \end{array}$$

Sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si

$$\left\{\begin{array}{ll} F \neq \emptyset & \\ \forall (x,y) \in E^2, & x+y \in F \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \lambda x \in F \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} F \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in E^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda x + \mu y \in F \end{array}\right.$$

- Un sous-espace vectoriel F de E est stable par combinaison linéaire : toute combinaison linéaire $\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_p x_p = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k$ de vecteurs $(x_1, \ldots, x_p)$ de F appartient à F.
- Tout sous-espace vectoriel de E est automatiquement un espace vectoriel (pour les lois induites).

Obtention d'espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$. Alors, les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E.

- L'intersection $F \cap G = \{x \in E \mid x \in F \text{ et } x \in G\}$.
- La somme $F + G = \{x \in E \mid \exists (y,z) \in F \times G,\ x = y + z\}$.
- L'espace engendré $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p) = \{x \in E \mid \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k\}$.

Familles de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. On dit que :

- $\mathcal{F}$ est libre si $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$.
- $\mathcal{F}$ est liée si elle n'est pas libre.
- $\mathcal{F}$ est génératrice de E si $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$.
- $\mathcal{F}$ est une base de E si elle est libre et génératrice de E.

Si $\mathcal{F}$ est une base de E, alors tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme combinai- …

son linéaire des éléments de $\mathscr{F}$:

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k$$

Le scalaire λ_k est appelé $k^{\text{ième}}$ coordonnée de x dans la base $\mathscr{F}$.

Sommes directes

- On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont en somme directe si :
$$\forall x \in F+G, \exists!(y,z) \in F \times G, \quad x = y+z$$
on parle d'unicité de la décomposition de tout vecteur de $F+G$ (comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G). On note alors $F+G = F \oplus G$.
- Les sous-espaces F et G sont en somme directe *si et seulement si* $F \cap G = \{0_E\}$.
- Si $(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_p)$ est une famille libre de E, alors les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(x_1, \dots, x_r)$ et $\text{Vect}(x_{r+1}, \dots, x_p)$ sont en somme directe.

Supplémentaires

- On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont supplémentaires dans E si
$$\forall x \in E, \exists!(y,z) \in F \times G, \quad x = y+z$$
c'est-à-dire si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On note alors $F \oplus G = E$.
- Les sous-espaces F et G sont en somme directe *si et seulement si* $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.
- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $1 \leqslant p \leqslant n$, alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont supplémentaires dans E.
- Si F et G sont supplémentaires dans E, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F et si $(f_1, \dots, f_q)$ est une base de G, alors la famille $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ est une base de E, dite base adaptée à la décomposition $F \oplus G = E$.

Synthèse

Espaces vectoriels de dimension finie

Dimension finie

- Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
- Si E est de dimension finie, alors il admet au moins une base et toutes ses bases ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E, et noté $\dim E$.
- Si E est de dimension finie n :
  - Toute famille libre admet au plus n éléments et une famille libre à n éléments est automatiquement une base de E.
  - Toute famille génératrice de E admet au moins n éléments, et une famille génératrice de E à n éléments est automatiquement une base de E
  - Une famille à n éléments est une base de E *si et seulement si* elle est libre *si et seulement si* elle est génératrice.

Espaces vectoriels dont la dimension est à connaître

$$\dim \mathbb{K}^n = n, \qquad \dim \mathbb{K}_n[X] = n+1, \qquad \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$$

On verra ultérieurement que si $\dim E = p$ et $\dim F = n$ alors $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = np$.

Théorèmes

- **Théorème de la base extraite :** de toute famille génératrice d'un espace vectoriel non nul E, on peut extraire une base de E.
- **Théorème de la base incomplète :** toute famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être complétée en une base de E.
- Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie n est de dimension finie inférieure ou égale à n.
- Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie n, de dimension $\dim F = n$, alors $F = E$.
- Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire dans E.

Rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

Le rang $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$ d'une famille $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension