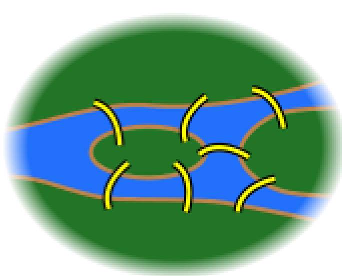
Recherche de parcours eulériens

méthode d'EULER

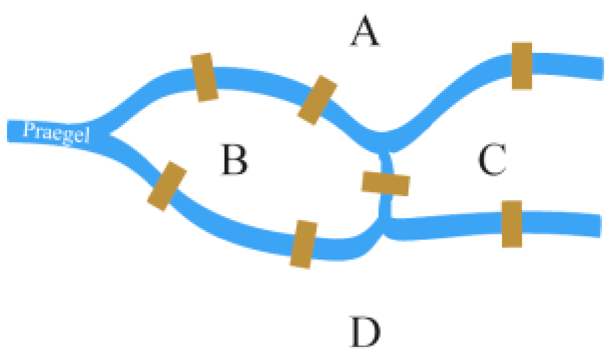
Historique (le problème des sept ponts)

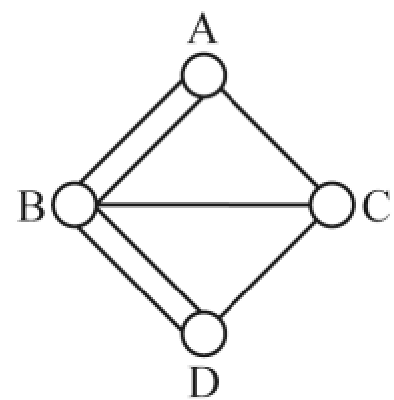
- Au 18e siècle, le mathématicien Euler a résolu le problème qui suit: La ville de Koenigsberg (appelée plus tard Kaliningrad) est traversée par la Praegel (fleuve en Russie) qui coule de part et d'autre de l'île de Kneiphof et possède sept ponts, comme le montre la figure ci-dessous. Un piéton peut-il, en se promenant, traverser une et une seule fois chaque pont ?



Historique (2)

- Présentation du problème des sept ponts par un graphe connexe non orienté :



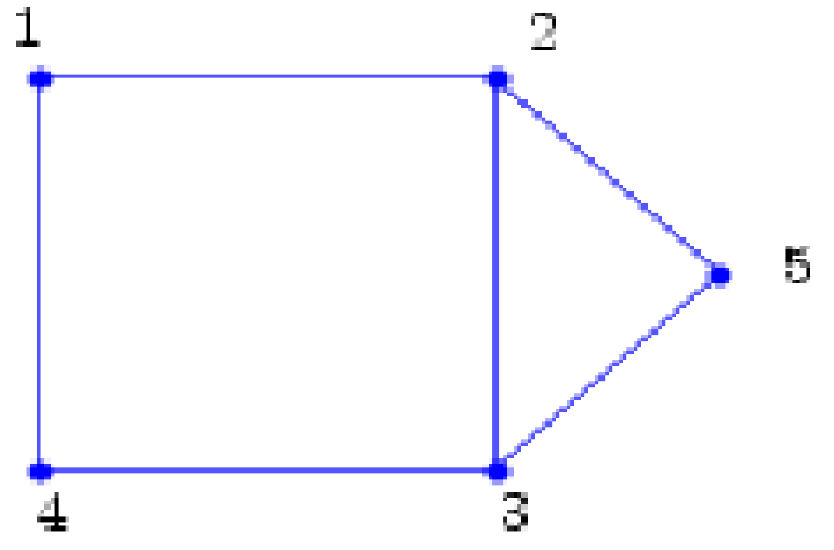


Théorème d’Euler pour les graphes non orientés

- Un chemin eulérien est un chemin qui passe par toutes les arêtes juste une seule fois. Si ce chemin est fermé, on dit que c’est un cycle eulérien.
- Soit un multi graphe G=(X, E). Il admet un parcours Eulérien si et seulement s’il est connexe et a 0 ou 2 sommets de degré impair. S’il a 0 sommet impair, G admet un cycle Eulérien et on peut partir d’un sommet quelconque pour y revenir. S’il a deux sommets impairs s et t, G admet un chemin eulérien joignant s et t.
- **Remarque :** On peut passer plusieurs fois par le même sommet, mais pas par la même arête.

Théorème d’Euler pour les graphes non orientés (2)

- **Exemple :** Dans le graphe de la figure qui suit, la chaîne 2 – 1 – 4 – 3 – 2 – 5 – 3 est une chaîne eulérienne.

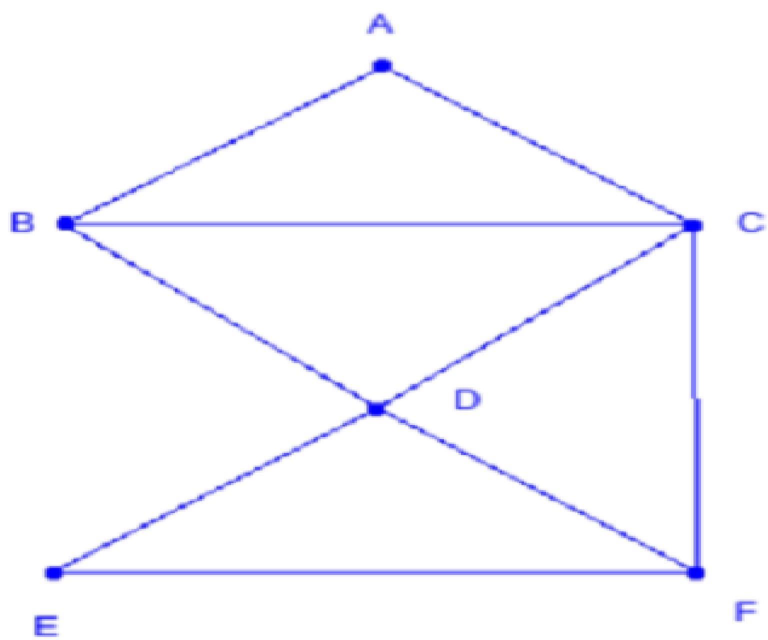


L'algorithme d'Euler

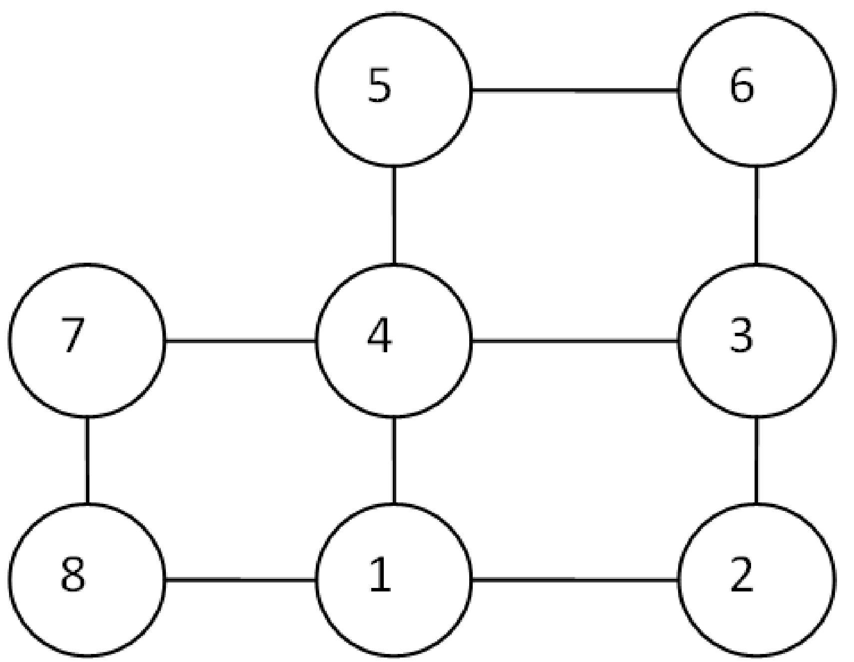
- Pour trouver un chemin eulérien, on applique l'algorithme suivant.
- compter le nombre de sommets de degré impair,
- Si
  - c'est 0 : construire un cycle partant du premier sommet,
  - c'est 2 : construire un chemin entre les deux sommets en question,
  - sinon, il n'y a pas de chemin eulérien.
- parcourir le chemin entres les sommets concernés : à chaque sommet
  - tant qu'il reste des arêtes partant de ce sommet dans le graphe, construire un cycle partant de ce sommet de sorte à éviter les arêtes déjà traités, et l'insérer dans le chemin.

L'algorithme d'Euler (2)

- **Exemple**
- Trouver deux parcours Eulériens en utilisant la méthode d'Euler du graphe de la figure qui suit:

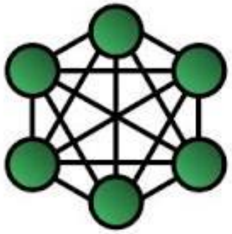


- Exercice 1 : Trouver deux parcours Eulériens en utilisant la méthode d’Euler du graphe de la figure suivante:



Applications (1)

- Détection des défaillances et surveillance des performances des chemins dans les réseaux tout-optique maillés [1].
- Background: **réseau maillé**



- Un réseau maillé (meshed) est un réseau qui utilise comme méthodes de connexion décentralisée une topologies de maillage complet ou partiel, c'est-à-dire que les nœuds du réseau sont reliés les uns aux autres de manière décentralisée

Applications (2)

- Background: **réseau tout-optique (1)**
- offre des performances incomparables puisque l'information est transmise à la vitesse des photons de bout en bout.
- les réseaux internationaux SONet(Synchronized Optical Network) aux États-Unis, ou son équivalent SDH (Synchronous Digital Hierarchy) en Europe utilisent les deux types d’équipements à la fois (optique et électronique) ,ce qui nécessite une conversion optique/ électronique (O/E) puis électronique/ optique (E/O) au niveau des points de jonction.
- Conséquence : ces points engendrent des temps d'attente.

Applications (3)

- Background: **réseau tout-optique (2)**
- Un réseau tout-optique n’utilise que des équipements optiques , et donc dirigent directement les signaux lumineux vers le nœud suivant.

Applications (4)

- Background: **possible défaillance réseau**
- Exemple :
  - Connection refused
  - Connection timed out
  - Login incorrect
  - Network is unreachable

  …

Applications (5)

- Objectifs de l’application:
  - Une **couverture en cycle** pour le graphe doit être retrouvé pour assurer la détection des défaillances et le contrôle des performances.
  - **Maximiser** l’utilisation des ressources réseau (bande passante) et **minimiser** le nombre d’ondes occupées par les canaux de contrôle.

Applications (6)

- Exemple de couverture de graphe composé de quatre cycles.

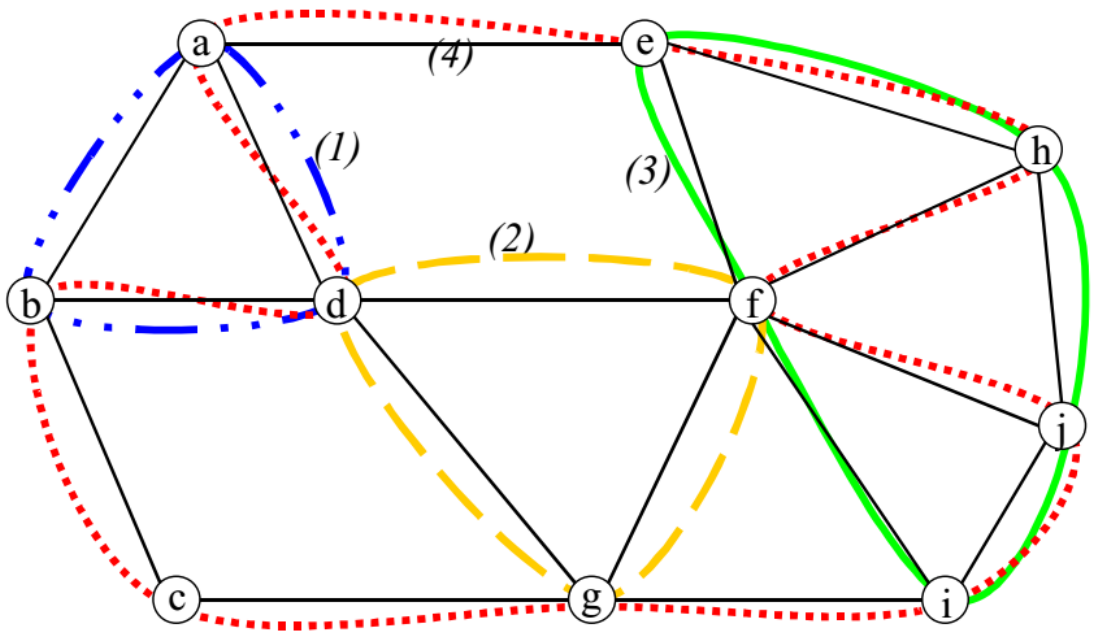


Fig. 1. A graph example and its cycle cover

Applications (7)

- Pour atteindre l’objectif de cette application, un algorithme basé sur la détection de cycle Eulerien est proposée pour parcourir une seule fois si c’est possible toutes les liaisons entre les nœuds.
- *Shortest path Eulerian matching (SPEM):*
  - *(1) Pour un graphe non Eulerien G(V , E): créer un ensemble de nœuds v’ pour les nœuds qui possèdent un degré impaire*
  - *(2) Commencez par un nœud x ∈V 'et trouvez le chemin le plus court vers tous les autres nœuds, sélectionnez le plus petit d'entre eux, noté p (x, y). Ajouter le chemin p (x, y) à G (maintenant certains liens dans G sont "doublés") et supprimer x, à partir de y V ';*
  - *(3) Répéter (2) jusqu'à V '= null. Maintenant G (V, E) est eulérien;*
  - *(4) Trouver un cycle eulérien du graphe augmenté et le décomposer en une couverture de cycle*

Applications (8)

1-5-8-10-9-10-6-9-7-6-8-5-6-4-7-3-2-4-1-2-1

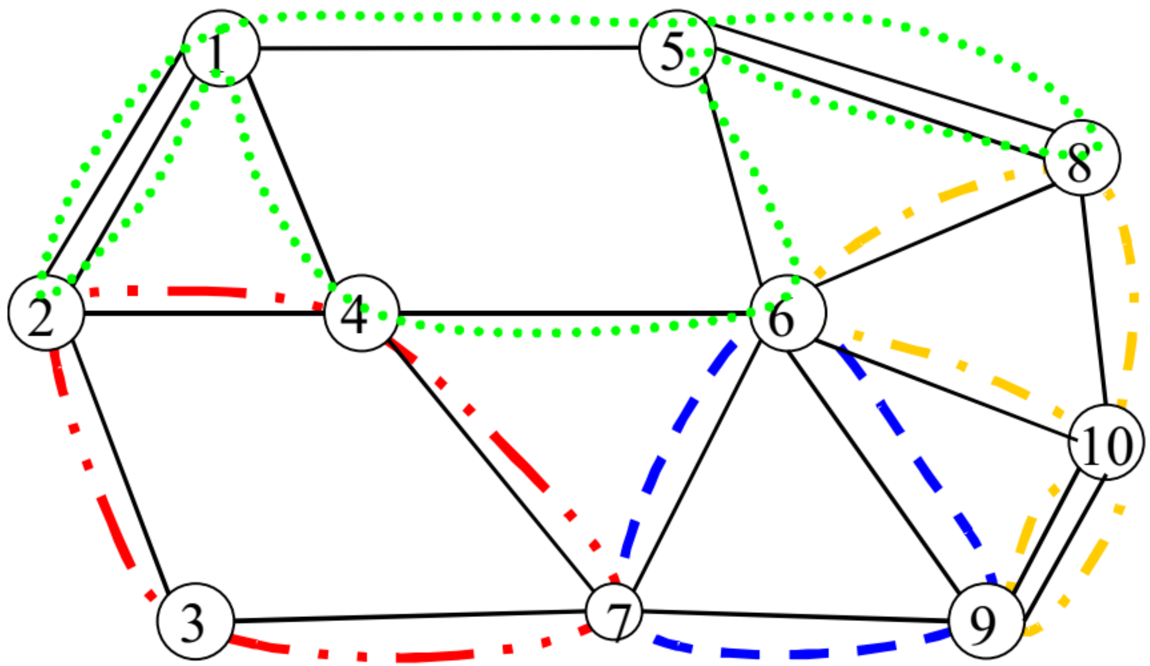


Fig. 4. Cycle cover obtained by SPEM

Références

- [1] Zeng, H., & Huang, C. (2004, November). Fault detection and path performance monitoring in meshed all-optical networks. In *Global Telecommunications Conference, 2004. GLOBECOM'04. IEEE* (Vol. 3, pp. 2014-2018). IEEE.